

République Arabe d'Égypte
Ministère de L'Éducation et
de L'Enseignement et
L'Enseignement technique
Administration centrale
des affaires de livres

Mathématiques

Pures

Deuxième Secondaire

Livre de l'élève   Premier Semestre

Section scientifique

2019 _ 2020

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh

M. Cerafiem Elias Skander

M. Magdy Abdelfatah Elsafty

M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

Traduction Révisée par

M. Fathi Ahmed Chehata

M. Adel Mohamed Hamza

M. Nasser Saad Zaghloul

Avant-propos



Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Égypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maître.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.

Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Épreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

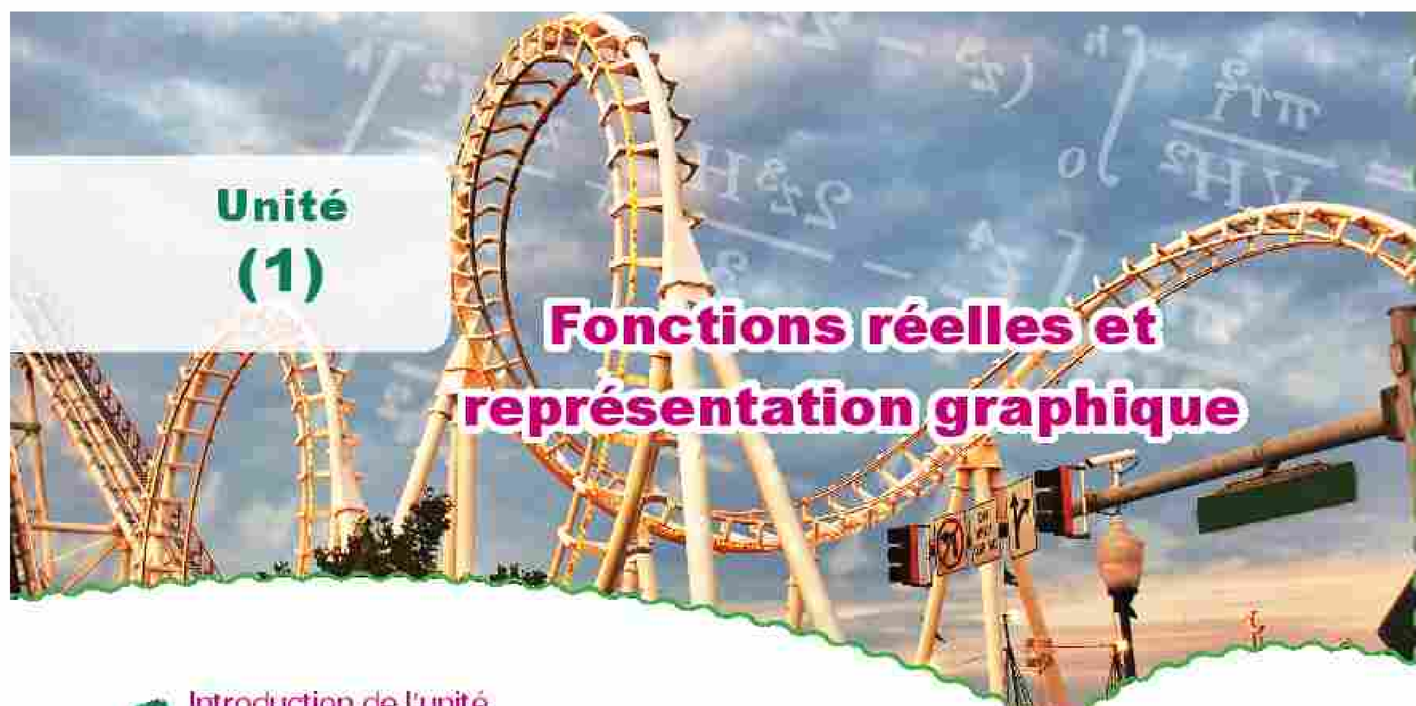
★ La clôture du livre est par des Épreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.

Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

SOMMAIRE



Unité (1)

Fonctions réelles et représentation graphique

Introduction de l'unité

Le savant Suisse de mathématiques et physique, Leonhard Euler (1807-1873) fut l'un de plus important des savants de 18ième siècle ,il a généralisé un multitude des expressions mathématiques comme la nation de la fonctions. Il est le premier qui utilisé la notation $y = f(x)$ pour exprimer la fonction en considérant que la fonction est une relation entre les éléments de deux ensembles de sorte qu'on puisse calculer la valeur d'une variable dépendant y à partir d'un autre variable indépendant choisit librement ce qui est enduit à transformer la géométrie en relations arithmétiques ainsi que les rapports trigonométriques, connues par les pharaons et les babéliens et maitrisées par les arabes, en fonctions trigonométriques.

Euler a introduit le constant $e \simeq 2.71828$ (nombre d'euler) comme une base du logarithme népérien, il a découvert la relation $e^{i\pi} + 1 = 0$ qui relie les cinq constants les plus importants en mathématiques.

Il a également relié les fonctions trigonométriques par les fonctions exponentielles et les nombres complexes.

Dans cette unité, on va aborder des différentes formes des fonctions réelles : représentation graphique, transformation le su représentation, logiciels, utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie courante dans les différents domaines.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître le concept de la fonction réelle.
- Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction réelle.
- Reconnaitre quelques propriétés des fonctions réelles.
- Identifier les fonctions injectives.
- Identifier les fonctions paires et les fonctions impaires et les distinguer.
- Déduire le sens de variation d'une fonction réelle (croissante, décroissante ou constante).
- Identifier les polynômes.
- Tracer les courbes représentatives des fonctions (carré – valeur absolue – cubique – rationnelle $f(x) = \frac{1}{x}$) et déduire les propriétés de chacune d'elles.
- Déduire l'effet des transformations : $f(x \pm a)$, $f(x) \pm a$ sur les fonctions précédemment citées.
- Déduire l'effet de $f(ax)$ et $af(x)$ sur les fonctions précédentes.
- Appliquer les transformations précédentes sur le tracé des courbes des fonctions réelles.
- Résoudre des équations de la forme : $|ax + b| = c$, $|ax + b| = |dx + c|$, $|ax + b| = cx + d$
- Résoudre des inéquations de la forme: $|ax + b| < c$, $|ax + b| > c$, $|ax + b| \leqslant c$, $|ax + b| \geqslant c$
- Utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie quotidienne dans les différents domaines.
- Relier les connaissances étudiées sur transformations précédentes aux fonctions trigonométriques sous forme d'activités.
- Utiliser le logiciel « Geogebra » pour représenter les fonctions graphiquement et voir l'effet des transformations sur ces fonctions.
- Utiliser une calculatrice programmable pour représenter les fonctions graphiquement et voir l'effet des transformations sur ces fonctions.

Expressions de base

- Fonction réelle
- Ensemble de définition
- Ensemble d'arrivée
- Ensemble image
- Une droite vertical
- Fonction définie par morceaux
- Composition de fonctions
- Fonction paire
- Fonction impaire
- Fonction injective
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante
- Fonction dé croissante
- Fonction constante
- Fonction polynôme
- Fonction valeur absolue
- Fonction du second degré
- Fonction rationnelle
- Asymptote
- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Homothétie
- Solution graphiqu

Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Fonctions réelles.

Leçon (1 - 2): Quelques propriétés des fonctions.

Leçon (1 - 3): Sens de variation des fonctions.

Leçon (1 - 4): Représentations graphiques des fonctions.

Leçon (1 - 5): Equations et inéquations.

Organigramme de l'unité



Aides pédagogiques

Calculatrice programmable – Ordinateur – Logiciels : Graph - Geogebra

Fonctions réelles

1 - 1

Allez apprendre

- La notion de fonction réelle.
- Le test de la droite verticale.
- La fonction définie par morceaux.
- L'identification de l'ensemble de définition et l'ensemble image de la fonction.
- Les opérations sur les fonctions.

Vocabulaires de base

- *Fonction*
- *Ensemble de définition*
- *Ensemble d'arrivée*
- *Ensemble image*
- *Diagramme sagittale*
- *Diagramme cartésien*
- *Droite verticale*
- *Définition par morceaux.*

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



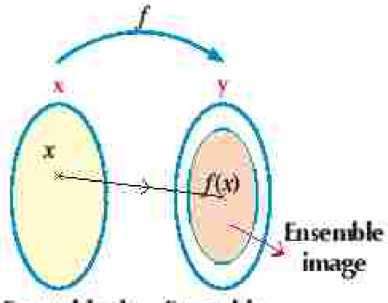
Soit f: X $\longrightarrow$ Y
Le graphe de la fonction f =
{ (x; y): x ∈ X, y ∈ Y, y = f(x) }

Découvrir

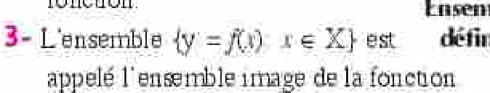
Vous avez déjà étudié la notion de fonction. C'est une relation entre deux ensembles non vides X et Y tels que à chaque élément de l'ensemble X on associe une seule image de l'ensemble Y. La fonction est notée par l'un des symbole : f, g, h, ... La fonction f s'écrit de l'ensemble X vers l'ensemble Y comme suit: f: X $\longrightarrow$ Y qui se lit: «f est une fonction de X vers Y».

On remarque que:

1- Pour tout élément $x \in X$, il existe un élément unique $y \in Y$ tel que: $y = f(x)$



2- L'ensemble X est appelé l'ensemble de définition de la fonction et l'ensemble Y est appelé l'ensemble d'arrivée de la fonction.

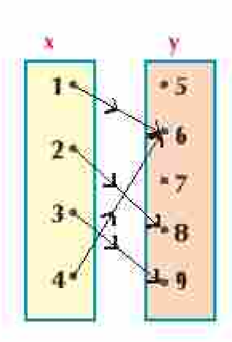


3- L'ensemble $\{y = f(x) : x \in X\}$ est appelé l'ensemble image de la fonction.

> **Définition 1**
>
> **Fonctions réelle**
>
> Une fonction est dite une fonction réelle si son ensemble de définition et son ensemble d'arrivée sont des parties de nombres réels $\mathbb{R}$.

Exemple

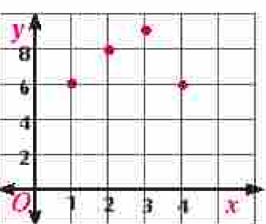
(1) La relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y indiquée par le diagramme sagittal ci-contre représente une fonction. L'ensemble X est son ensemble de définition = {1 ; 2 ; 3 ; 4}. L'ensemble Y est son ensemble d'arrivée = {5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}. L'ensemble {6 ; 8 ; 9} est son ensemble image de la fonction. Cette relation peut être représentée par le diagramme cartésien suivant : Le graphe de la fonction = {(1 ; 6), (2 ; 8), (3 ; 9), (4 ; 6)}



Remarquez que : de l'exemple précédent

1- La représentation graphique de la fonction est un ensemble discontinu des points.

2- La droite verticale passant par les éléments de l'ensemble de défintion coupe la représentation en un seul point.



Essayez de résoudre

(1) Dans les figures ci-contre. Si x est le nombre des rangs et y est l'aire de la figure en unité carrés. les petits carrés sont identiques.

(a) Quel est la valeur de y :
si $x = 5$ et si $x = 9$?

(b) Ecrivez la relation entre le nombre des rangs de la figure et son aire.

(c) Cette relation est-elle une fonction de X vers Y ? Pourquoi?

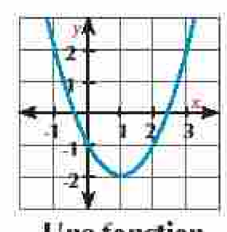
X	Y
2	3
3	8
4	.....
5	.....



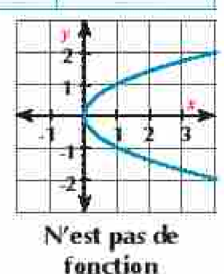
A apprendre

Test de la droite verticale

Si la droite verticale en tout élément de l'ensemble de définition passe par un seul point des points représentants la relation, alors cette relation est une fonction de X ⟶ Y



Une fonction



N'est pas de fonction

Exemple **Déterminer les relations qui représentent des fonctions**

(2) Dans chacune des figures suivantes, montrez si y représente une fonction en x ou non.

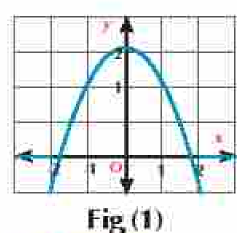


Fig (1)

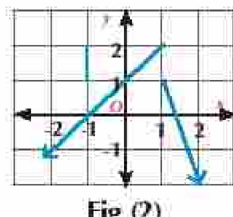


Fig (2)

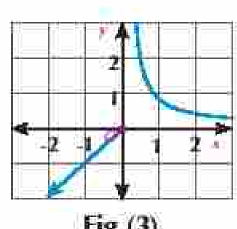


Fig (3)

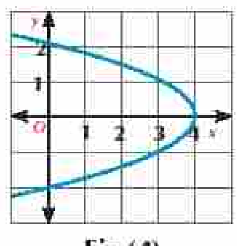


Fig (4)

Solution

La figure (1) représente une fonction.

La figure (2) ne représente pas de fonction car la droite verticale passant par le point de coordonneés (1 ; 0) coupe la courbe en deux points.

La figure (3) représente une fonction.

La figure (4) ne représente pas de fonction car il existe au moins une droite verticale qui coupe la courbe en plus qu'un point.

Essayez de résoudre

(2) Parmi les figures suivantes, laquelle représente une fonction de X ⟶ Y. Pourquoi?

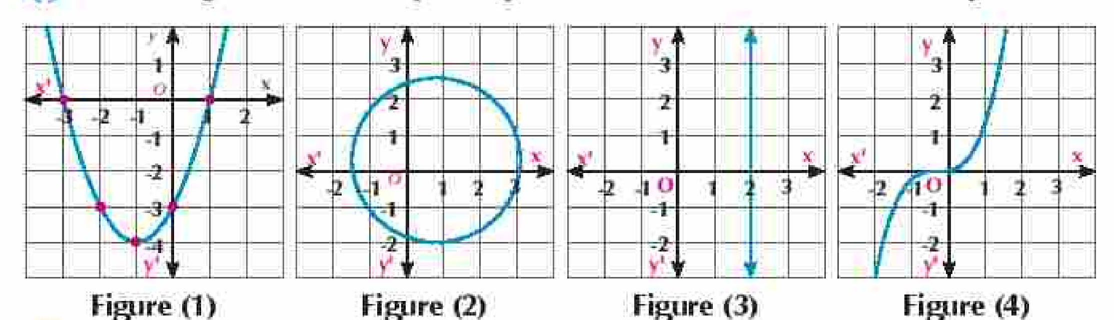


Figure (1) Figure (2) Figure (3) Figure (4)

Exemple

Détermination de l'ensemble définition et l'ensemble image

(3) **a** Soit f: [1 ; 5] ⟶ $\mathbb{R}$ où $f(x) = x + 1$

Tracez la courbe représentative de la fonction f, déduisez-en l'ensemble image de f.

b Soit g: [1 ; 5[⟶ $\mathbb{R}$ où $g(x) = x + 1$

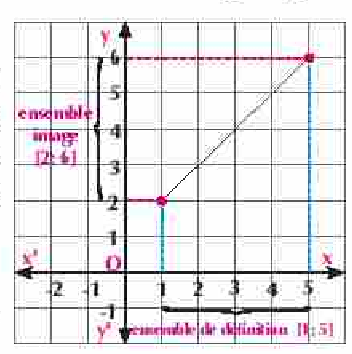
Tracez la courbe représentative de la fonction g, déduisez-en l'ensemble image de g.

Solution

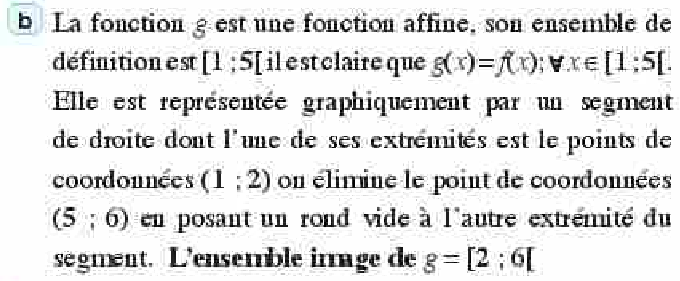
a La fonction f est une fonction affine, son ensemble de définition est [1 ; 5] Elle est représentée graphiquement par un segment de droite dont les extrémités sont les deux points de coordonnées (1 ; f(1)) , (5 ; f(5)) ou les deux points de coordonnées (1 ; 2), (5 ; 6).

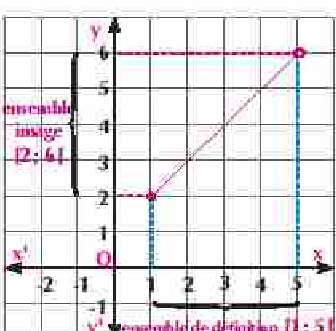
L'ensemble image de f = [2 ; 6]

C'est l'ensemble des ordonnées des points appartenant à la courbe de la fonction.



b La fonction g est une fonction affine, son ensemble de définition est [1 ;5[il est claire que $g(x) = f(x)$; $\forall x \in$ [1 ;5[. Elle est représentée graphiquement par un segment de droite dont l'une de ses extrémités est le points de coordonnées (1 ; 2) on élimine le point de coordonnées (5 ; 6) en posant un rond vide à l'autre extrémité du segment. **L'ensemble image de** g = [2 ; 6[





Essayez de résoudre

(3) **a** Soit f : [1 ; +∞[⟶ $\mathbb{R}$, où $f(x) = 1 - x$

Tracez la courbe représentative de la fonction f, déduisez l'ensemble image de f.

b Soit g:]- ∞; -1[⟶ $\mathbb{R}$ où $g(x) = 1 - x$

Tracez la courbe représentative de la fonction g, déduisez l'ensemble image de g.

Fonction définie par morceau:



Pour diminuer la consumation de l'électricité, de l'eau et de gaz, on calcule la valeur de la consumation mensuelle suivant des tranches particulières qui relient la quantité de consommation par sa valeur.
Le tableau suivant indique les tarifs, en piastres, des tranches de la consommation mensuelle de gaz naturel. Avec votre camarade, calculez les tarifs, en piastres, de la consommation d'une maison pour les quantités suivantes:

Consommationen mètres cubes	Tarifs en piastres
Jusqu'à 25	40
Plus que 25 Jusqu'à 50	100
Plus que 50	150

1- 30 mètres cubes par mois.

2- 60 mètres cubes par mois.

[Les taxes et les frais de services sont ajoutés après avoir calculé la valeur de la consommation mensuelle]

On peut exprimer le tableau précédent par la fonction f pour calculer les tarifs de consumation mensuel de $x \in \mathbb{R}$ mètre cube par:

$$f(x) = \begin{cases} 40\,x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 25 \\ 100\,x - 1500 & \text{si} \quad 25 < x \leqslant 50 \\ 150\,x - 4000 & \text{si} \quad x > 50 \end{cases}$$

Cette fonction est une fonction réelle définie par morceaux (définie sur plusieurs intervalles)



La fonction définie par morceaux est une fonction réelle, pour quelques parties de son ensemble de définition sont attribués des règles de définitions différentes.

Essayez de résoudre

(4) En utilisant la fonction précédentes, vérifiez votre réponse avec vos camarades, puis calculer les tarifs de la consommation mensuelle de gaz pour les quantités suivantes:

(a) 15 mètres cubes (b) 40 mètres cubes (c) 54 mètres cubes

Représentation de la fonction définie par morceaux:

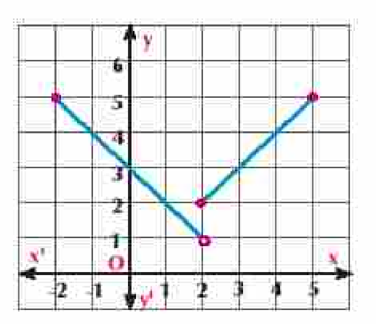
Exemple

(4) Soit $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 2 \\ x & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction, déduisez-en l'ensemble définition et l'ensemble image de la fonction.

Solution

La fonction est définie par morceaux sur deux intervalles, elle est attribuée par deux règles de définitions.



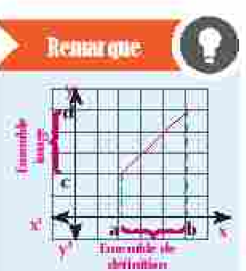
La première: $f_1(x) = 3 - x$ sur l'intervalle $-2 \leqslant x < 2$ ou sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2[$. C'est une fonction affine qui est représentée par un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $(-2\ ;\ 5)$ et $(2\ ;\ 1)$ en posant un rond vide à l'extrémité de coordonnées $(2\ ;\ 1)$ car $2 \notin [-2\ ;\ 2[$ **(voir la figure ci-contre).**

La deuxième: $f_2(x) = x$ si $2 \leqslant x \leqslant 5$ ou sur l'intervalle $[2;\ 5]$

C'est une fonction affine qui est représentée par un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $(2\ ;\ 2)$ et $(5\ ;\ 5)$

Donc l'ensemble définition de $f = [-2\ ;\ 2[\cup [2\ ;\ 5] = [-2\ ;\ 5]$

Remarque



Dans le graphique représentant la fonction f.
Le domaine de $f = [a\ ;\ b]$
L'ensemble image $= [c\ ;\ d]$

Du graphique, on déduit que:

L'ensemble définition de $f = [-2;\ 5]$

L'ensemble image de $f =]1;\ 5]$

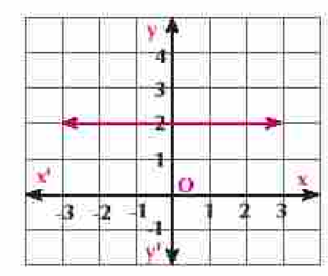
 **Essayez de résoudre**

5 Soit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

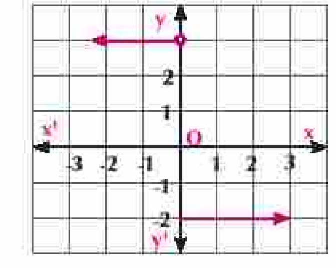
Tracer la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction.

6 Dans chacune des figures suivantes, déduisez l'ensemble définition et l'ensemble image de f

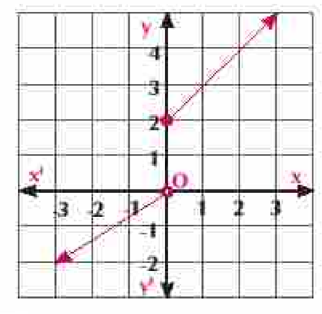
a



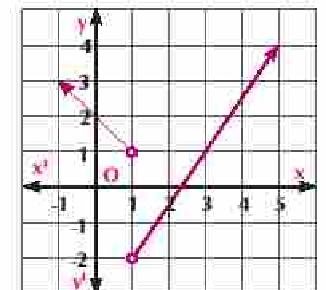
b



c



d



Détermination de l'ensemble définition d'une fonction réelle et les opérations

On peut déterminer l'ensemble définition d'une fonction réelle à partir de sa règle de définition ou de sa représentation graphique.

Remarque

L'ensemble de définition de la fonction polynôme est l'ensemble des nombres réels, si la fonction n'est pas définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ on mettre?

Exemple **Détermination de l'ensemble définition d'une fonction**

(5) Déterminez l'ensemble définition de chacune des fonctions réelles définies par les règles suivantes:

a $f_1(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ b $f_2(x) = \sqrt{x-3}$

c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$ d $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

Solution

a La fonction f_2 n'est pas définie lorsque le dénominateur = 0 pour cela $x^2 - 9 = 0$ alors $x = \pm 3$ l'ensemble définition de f_1 est donc $\mathbb{R}$ - {-3 ; 3}.

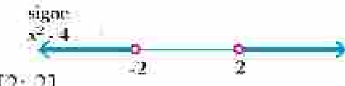
b La fonction f_1 est définie lorsque le radicand est positive ou nul, c.à.d. toutes les valeurs de x pour lesquelles $x - 3 \geqslant 0$.



$\because x - 3 \geqslant 0$ $\therefore x \geqslant 3$ $\therefore$ l'ensemble définition de f_2 = [3 ; +∞ [.

c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$, l'indice de la racine est nombre impaire l'ensemble définition de $f_3 = \mathbb{R}$

d La fonction f_4 est définie lorsque $x^2 - 4 > 0$



L'ensemble définition de f_4 =]-∞; -2[∪]2 ; +∞[= $\mathbb{R}$ - [2; 2]

Remarquez que:

Soient $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ où $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$, g (x) est un polynôme

i) Si n est un nombre impair alors l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

ii) Si n est un nombre pair alors l'ensemble définition de f est les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geq 0$

Essayez de résoudre

(7) Déterminez l'ensemble définition de chacune des fonctions réelles définies par les règles suivantes:

a $f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+2}$ b $f_2(x) = \sqrt{x^2-16}$

c $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$ d $f_4(x) = \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}$

Pensé critique:

Trouvez la valeur de k , sachant que l'ensemble définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x^2-6x+k}$ est $\mathbb{R}$ - {3}

A apprendre

Opérations sur les fonctions

Soient f_1 et f_2 deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_1 et D_2 respectivement, alors:

1 $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, l' ensemble définition de $(f_1 \pm f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

2 $(f_1 \ f_2)(x) = f_1(x) \ f_2(x)$, l' ensemble définition de $(f_1 \ f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

3 $(\frac{f_1}{f_2})(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où $f_2(x) \neq 0$ l' ensemble définition de $(\frac{f_1}{f_2})$ est $(D_1 \cap D_2) - Z(f_2)$

Où $Z(f_2)$ est l'ensemble des zéros de f_2

On remarque que: dans tous les cas précédents, l'ensemble définition de la fonction obtenue est égale à l'intersection des ensemble de définition de f_1 et f_2 privé des valeurs qui rend $f_2(x) = 0$, c'est dans le cas de la division.

Exemple

6 Soient $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = \sqrt{4-x}$

i) Trouvez la règle et l'ensemble définition de chacune des fonctions suivantes:

a $(f + g)$ **b** $(g - h)$

c $(f \ h)$ **d** $(\frac{h}{f})$

ii) Calculez la valeur numérique, si possible, pour chacune des fonctions suivantes:

a $(g - h)(1)$ **b** $(f h)(5)$ **c** $(\frac{h}{f})(3)$

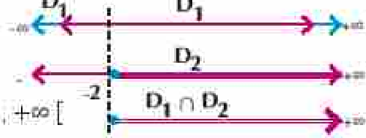
Solution

i) L'ensemble définition de $f = D_1 = \mathbb{R}$, l'ensemble définition de $g = D_2 = [-2 \ ; +\infty[$, et l'ensemble définition de $h = D_3 =]-\infty \ ; 4]$

a $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= x^2 - 4x + \sqrt{x+2}$

L'ensemble définition de $(f + g)$ $\mathbb{R} \cap [-2 \ ; +\infty[= [-2 \ ; +\infty[$

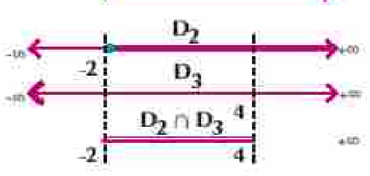


b $(g - h)(x) = g(x) - h(x)$

$= \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}$

L'ensemble définition de $(h - g)$ est

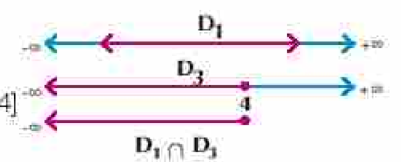
$[-2 \ , +\infty[\cap]-\infty, 4] = [-2 \ , 4]$



c $(f \ h)(x) = f(x) \ h(x)$

$= (x^2 - 4x) \ \sqrt{4-x}$

L'ensemble définition de $(f h) = \mathbb{R} \cap]-\infty \ ; 4] =]-\infty \ ; 4]$

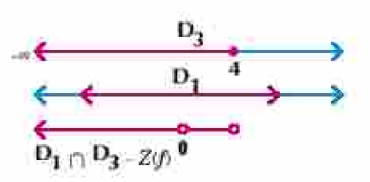


d $(\frac{h}{f})(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-4x}$

L'ensemble des zéros de la fonction est {0 ; 4}

L'ensemble définition de $(\frac{h}{f})$ =] -∞ ; 4] ∩ R - {0; 4}

=] -∞ ; 4[- {0}



ii) Les valeurs numériques:

a ∵ $(g - h)(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}$ pour tout $x \in [-2; 4]$,

$1 \in [-2; 4]$ ∴ $(g - h)(1) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

b ∵ $(f . h)(x) = (x^2 - 4x)\sqrt{4-x}$ pour tout $x \in]-\infty ; 4]$

, $5 \notin]-\infty ; 4]$ ∴ $(f . h)(5)$ **est indéfinie**

c ∵ $(\frac{h}{f})(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-4x}$ pour tout $x \in]-\infty ; 4[- \{0\}$

∴ $(\frac{h}{f})(3) = \frac{\sqrt{4-3}}{9-12} = -\frac{1}{3}$

Essayez de résoudre

8 Soient f et g deux fonctions réelles définies par :

$f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{x-1}$.**Trouvez :**

a L'ensemble définition des fonctions: $(f+g)$, $(f . g)$, $(\frac{f}{g})$, $(\frac{g}{f})$

b Calculez la valeur numérique, si possible, pour chacune des fonctions suivantes:

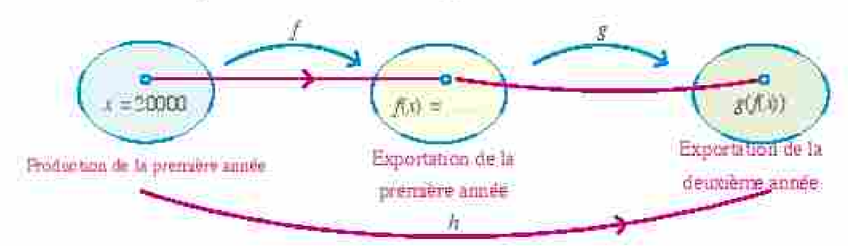
$(f+g)(5)$, $(f. g)(2)$, $(\frac{f}{g})(3)$, $(\frac{g}{f})(-2)$

Travail coopératif **Composée des fonctions**

Une usine exporte une partie de sa production suivant la relation $f(x) = \frac{1}{4}x$ où x représente le nombre des unités produites à la première année. Le nombre des unités produites à la deuxième année est donné par la relation $g(f) = f + 1500$ où x représente le nombre des unités exportées à la première année. Avec votre camarade, trouvez le nombre des unités exportées à la deuxième année si la production de la première année est:

a 20000 unités. b 80000 unités.

Suivez le schéma suivant pour vérifier votre réponse :

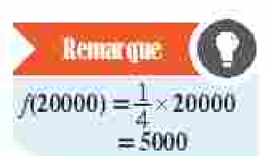


A apprendre

Si l'ensemble image de la fonction f est une parti de l'ensemble de définition de la fonction g, on peut déduire une nouvelle fonction h composée de deux fonctions notée $h = g \circ f$ qui se lit g rond f, ce que veut dire composé de f suivie de g

On a donc $h(x) = (g \circ f)(x)$
$= g(f(x))$

Du schéma précédent, on obtient:



a) $h(20000) = g\,[f(20000)]$
$= g(5000)$
$= 5000 + 1500 = 6500$ unités.

b) $h(80000) =$ ....

Réfléchissez : **La composée des fonctions, est-elle une opération commutative?**

➢ Pour répondre à cette question, trouver $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ pour $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 2x$

Essayez de résoudre

9) Soient $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 3x$

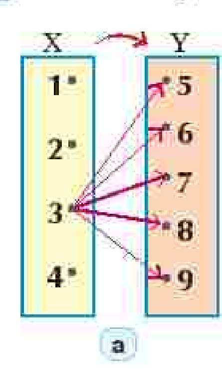
i) Trouvez $(f \circ g)(3)$

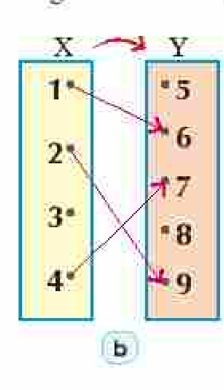
ii) Déterminez la valeur de x pour que $(f \circ g)(x) = 42$

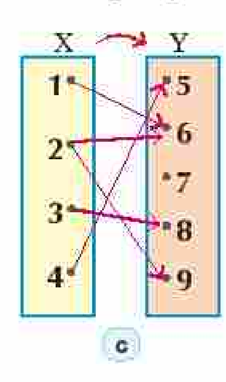


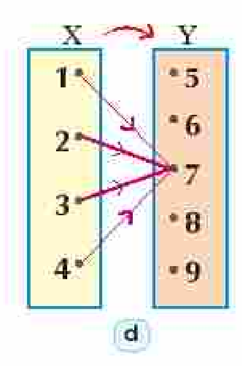
Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) Parmi les diagrammes sagittaux suivants, la relation qui représente une fonction est:

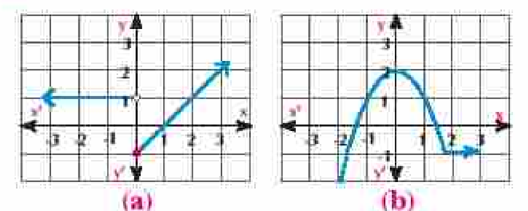

a


b

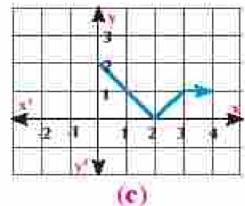

c


d

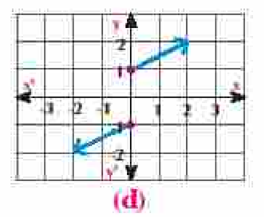
2. Parmi les diagrammes cartésiens suivants, la relation qui ne représente pas de fonction est:



(a) (b)



(c)



(d)

3. Laquelle des relations suivantes ne représentent pas une fonction:

a) $\{(1\,;3), (3\,;5), (5\,;7), (7\,;9)\}$ b) $\{(2\,;3), (3\,;4), (2\,;1), (3\,;5)\}$

c) $\{(0\,;3), (1\,;3), (2\,;3), (3\,;3)\}$ d) $\{(-3\,;5), (-1\,;5), (0\,;5), (2\,;5)\}$

4. Dans toutes les relations suivantes, y est une fonction en x sauf la relation:

a) $y = 3x + 1$ b) $y = x^2 - 4$

c) $x = y^2 - 2$ d) $y = \sin x$

Répondez à ce qui suit:

5. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \\ -1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

Puis tracez la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduirz l'ensemble image.

6. Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geqslant 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction.

7. Soit $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction

8. Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } -3 \leqslant x < 0 \\ x + 2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction

9 Soit: $f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{si } x < 3 \\ -x^3 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 8 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

Trouvez :

a $f(2)$ b $f(3)$ c $f(10)$

10 **En lien avec la mécanique:** Si la vitesse d'une moto est $v(t)$ cm/s , où t est le temps, est donnée par la relation v définie par:

$$v(t) = \begin{cases} 8t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 80 & \text{si } 10 < t < 200 \\ -4t + 880 & \text{si } 200 \leqslant t \leqslant 220 \end{cases}$$

Trouvez :

a $V(10)$ b $V(150)$ c $V(210)$

11 **En lien avec la commerce:** Soit la fonction f où :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 5000 \\ 2x + 2500 & \text{si } 5000 < x \leqslant 15000 \\ \frac{3}{2}x + 10000 & \text{si } 15000 < x \leqslant 60000 \end{cases}$$

Représentez la somme reçue par l'une des sociétés de la distribution d'un type des appareils où x est le nombre d'appareil. Trouvez :

a $f(5000)$ b $f(10000)$ c $f(50000)$

12 **En lien avec la géométrie:** Soit p le périmètre d'un carré de coté ℓ. Ecrivez le périmètre en fonction de la longueur de son coté $p(\ell)$ puis trouvez

a $P(3)$ b $P(\frac{15}{4})$

13 **En lien avec la géométrie:** Soit A l'aire d'un cercle de rayon r. Ecrivez l'aire en fonction de la longueur de son rayon $A(r)$ puis trouvez : $A(\frac{1}{2})$ et $A(5)$.

14 Déterminez l'ensemble de définition de chacune des fonctions réelles suivantes:

a $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 5x + 6}$ b $f(x) = \frac{x+1}{x^3 + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x - 1}}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

15) **Soient:** $f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_1(x) = 3x - 1$,

$f_2: [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_2(x) = 2x + 4$

Trouvez , en indiquant l'ensemble définition de : $(f_1 + f_2)(x)$, $(f_1 - f_2)(x)$

16) **L'ensemble définition de :** $f_1(x) = x + 2$ est l'ensemble définition de $f_1 = [-3 ; 4]$, $f_2(x) = x^2 + 2x$ est $f_2 = [-1 ; 3]$,

Trouvez : $(f_1 + f_2)(x)$, $(f_2 - f_1)(x)$, $(\dfrac{f_1}{f_2})(x)$, $(\dfrac{f_2}{f_1})(x)$ en indiquant l'ensemble de définition de chacune des fonctions ainsi obtenues.

17) **Soient :** $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 5$ et $h(x) = x^3$
Trouvez:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$ c) $(g \circ h)(1)$ d) $(h \circ f)(-2)$

18) **Soient :** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x + 3$

Trouvez : $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ indiquant l'ensemble définition de chacune des fonctions ainsi obtenues.

19) **Soient:** $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x - 2}$

trouvez: $(f \circ g)(x)$ sous la forme la plus simple en indiquant l'ensemble définition de la fonction ainsi obtenue puis trouvez $(f \circ g)(3)$

20) **Pensé critique:**

Si $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$; trouvez les deux fonctions f et g de sorte que: $h(x) = (f \circ g)(x)$

Unité (1)

Quelques propriétés des fonctions

1 - 2

Allez apprendre

- La symétrie des courbes.
- Représentatives des fonctions.
- Les fonctions paires.
- Les fonctions impaires.
- Les fonctions injectives.

Vocabulaires de base

- Fonction paire
- Fonction impaire
- Fonction injective
- Droite horizontale

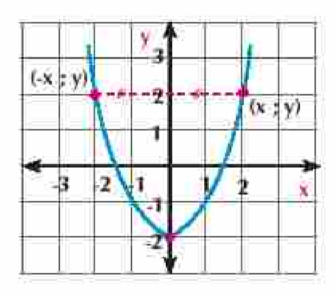
Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

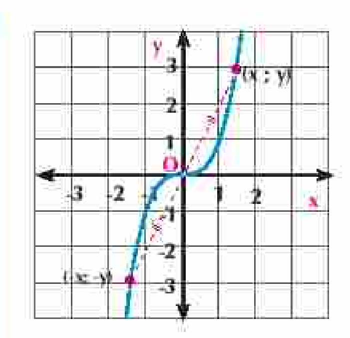
On peut caractériser facilement des propriétés géométriques de la courbe représentative d'une fonction f où $y = f(x)$. ces propriétés peuvent être utilisées pour l'étude des fonctions et leurs applications. Parmi ces propriétés la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et la symétrie par rapport à l'origine..

Préliminaire

Vous avez déjà étudié la notion de la symétrie par rapport à une droite où on peut plier la figure le long de la droite pour obtenir deux demi-figures superposables. Vous avez également étudié la symétrie par rapport à un point.



Symétrie par rapport à l'axe des y
Fig (1)



Symétrie par rapport à l'origine
Fig (2)

Dans la figure (1)

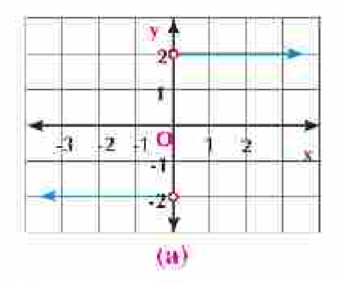
Le point $(-x ; y)$ situé sur la courbe de la fonction est l'image du point $(x ; y)$ situé sur la même courbe par la symétrie par rapport à l'axe des y.

Dans la figure (2):

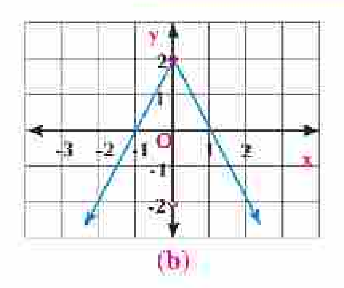
La représentation graphique de la relation entre x et y montre une symétrie par rapport au point d'origine où le point $(-x ; -y)$ de la courbe est l'image du point $(x ; y)$ situé sur la même courbe.

Essayez de résoudre

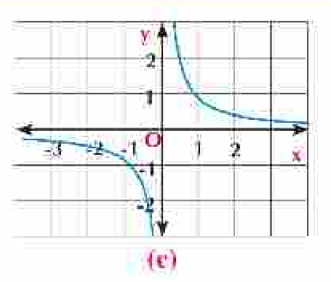
1. Dans chacune des figures suivantes, montrez si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y ou par rapport à la origine.



(a)



(b)



(c)

Pensé critique:

Est-ce que toutes les courbes représentatives des fonctions sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine ? vérifier votre réponse.

Fonctions paires et fonctions impaires:



A apprendre

Fonction paire: On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est paire si $f(-x) = f(x)$, pour tout $x \in X$, $-x \in X$ et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire: On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est impaire si $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in X$, $-x \in X$ x et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Remarque : Beaucoup des fonctions ne sont ni paires ni impaires.

Pour étudier la parité d'une fonction, on vérifie d'abord l'existence de x et $-x$ dans l'ensemble de définition de la fonction sinon on n'a pas besoin de chercher $f(-x)$.



Exemple

1. Étudiez la parité de chacune des fonctions suivantes .

a $f(x) = x^2$ **b** $f(x) = x^3$ **c** $f(x) = \sqrt{x+3}$ **d** $f(x) = \cos x$

Solution

a $f(x) = x^2$ ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

C.à.d: $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ La fonction f est paire.

b $f(x) = x^3$ ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

C.à.d: $f(-x) = -f(x)$ $\therefore$ La fonction f est impaire

Remarque importante:

La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = ax^n$ où $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ est appelée fonction exponentielle. Cette fonction est paire si n est un nombre paire et elle est impaire si n est un nombre impaire.

c $f(x) = \sqrt{x+3}$, ensemble définition de $f = [-3\ ; +\infty[$

Remarquez que $4 \in [-3\ ; +\infty[$ tandis que $-4 \notin [-3\ ; +\infty[$

$\therefore$ Pour tout $x \in [-3\ ; +\infty[$ il n'a pas $-x \in [-3\ ; +\infty[$

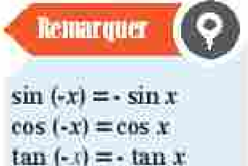
La fonction f est ni paire ni impaire.

d $f(x) = \cos x$, ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$:

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

C.à.d.: $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ f la fonction f est paire



$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$

Essayez de résoudre

2 Etudiez la parité de chacune des fonctions suivantes.

a $f(x) = \sin x$ b $f(x) = x^2 + \cos x$ c $f(x) = x^3 - \sin x$

d $f(x) = x^2 \cos x$ e $f(x) = x^3 \sin x$ f $f(x) = x^3 \cos x$

g $f(x) = x^3 + x^2$ h $f(x) = \sin x + \cos x$ i $f(x) = \sin x \cos x$

Que déduisez-vous?

Remarques importantes:

Si f_1 et f_2 sont des fonctions paires et g_1 et g_1 sont des fonctions impaires, alors:

1) $f_1 + f_2$ est une fonction paire **2)** $g_1 + g_2$ est une fonction impaire.

3) $f_1 \times f_2$ est une fonction paire **4)** $g_1 \times g_2$ est une fonction paire.

5) $f_1 \times g_2$ est une fonction impaire **6)** $f_1 + g_2$ est une fonction qui n'est ni paires ni impaire.

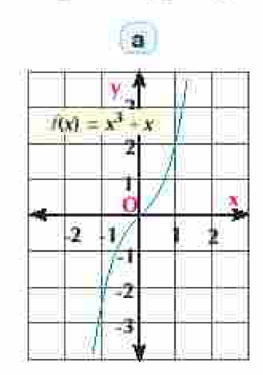
En utilisant les propriétés précédentes, vérifiez votre réponse obtenues en Essayez de résoudre (2).



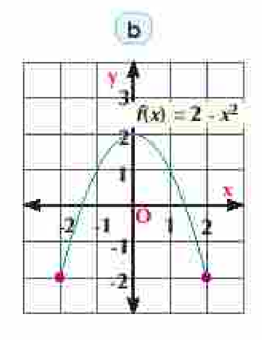
Exemple

2 Chacune des figures suivantes est une représentation de la fonction f. Déterminez graphiquement si la fonction est paire ou impaire ou ni paire ni impaire puis vérifiez la réponse algébriquement.

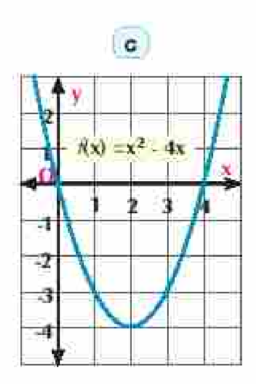
a



b



c



Solution

a $f(x) = x^3 + x$, de la représentation graphique, on remarque que:

L'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$ et la courbe de la fonction est symétrique par rapport au point d'origine donc la fonction est impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

∵ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ ∴ $f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

En simplifiant: $f(-x) = -x^3 - x$

Prendre (– 1) facteur commun $f(-x) = -(x^3 + x)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc la fonction est impaire.

b $f(x) = 2 - x^2$, de la représentation graphique, on remarque que

L'ensemble définition de $f = [-2 ; 2]$, et la courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc la fonction est paire. Pour vérifier le résultat algébriquement

∵ Pour tout $x \in [-2 ; 2]$, $-x \in [-2 ; 2]$ ∴ $f(-x) = 2 - (-x)^2$

En simplifiant $f(-x) = 2 - x^2$

$f(-x) = f(x)$ **Donc** la fonction est paire

c $f(x) = x^2 - 4x$, de la représentation graphique, on remarque que

L'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, et la courbe de la fonction n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni symétrique par rapport au point d'origine. Donc la fonction n'est ni paire ni impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

∵ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ ∴ $f(-x) = (-x)^2 - 4(-x)$

En simplifiant $f(-x) = x^2 + 4x \neq f(x)$ ∴ f n'est pas paire

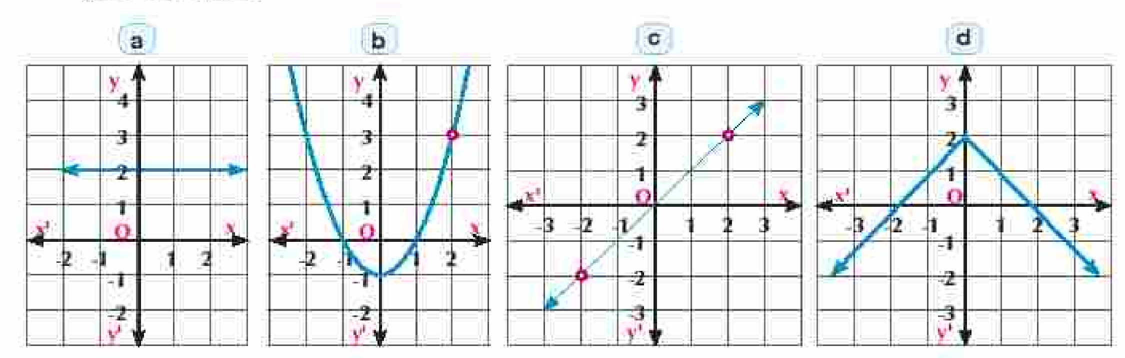
Mais $-f(x) = -x^2 + 4x$

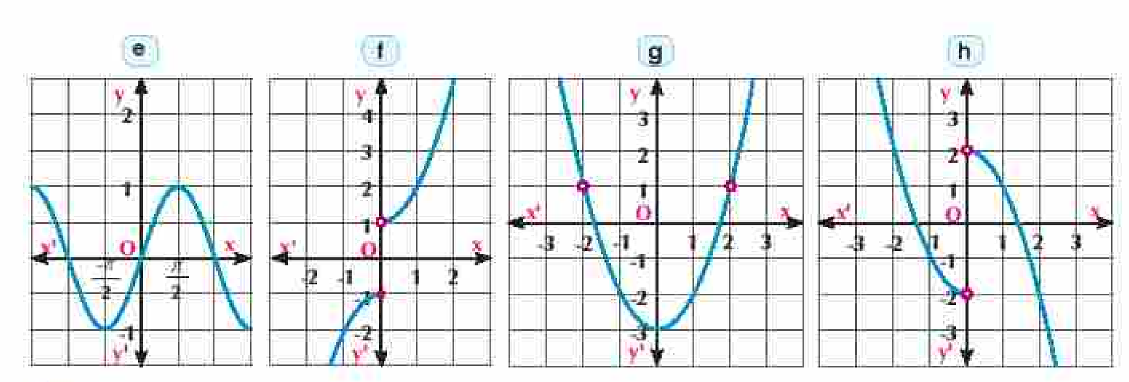
Donc $f(-x) \neq -f(x)$ ∴ f n'est pas impaire

Donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

Essayez de résoudre

3 Dans chacune des figure suivantes, déterminez si la fonction est paire ou impaire ou n'est ni paire ni impaire.

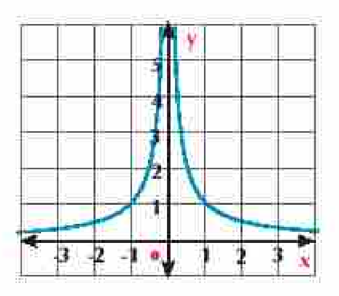




Exemple

(3) La figure suivante représente la courbe d'une fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Montrez que la fonction f est paire puis vérifier le résultat algébriquement.

Solution

De la représentation graphique ci-contre, il est clair que la courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des y. Donc la fonction est paire.

Vérification algébrique:

L'ensemble définition de $f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

$\because$ Pour tout x, $-x \in$ l'ensemble définition de f $\therefore f(-x) = \begin{cases} -\frac{1}{(-x)} & \text{si } (-x) < 0 \\ \frac{1}{(-x)} & \text{si } (-x) > 0 \end{cases}$

En simplifiant $f(-x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

En remplaçant les deux règles $f(-x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

C.à.d. $f(-x) = f(x)$ d'où la fonction est paire.

Essayez de résoudre

(4) Représentez graphiquement la fonction $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

Du graphique: montrez la parité de la fonction f puis vérifiez le résultat algébriquement.

Fonction injective:



Définition 1

La fonction $f: X \longrightarrow Y$ est une **fonction injective** si :

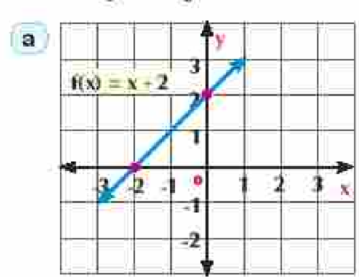
Pour tout $a \in X$, $b \in X$, $f(a) = f(b)$ alors $a = b$

Autrement dit, si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$

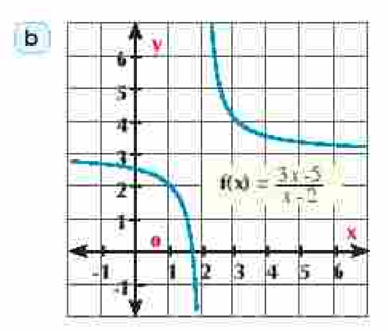
Exemple

4 Les figures suivantes sont des représentations d'une fonction $f: X \longrightarrow Y$, démontrez que la fonction f est injective.

a



b



Solution

a $f(x) = x + 2$, ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) = a + 2$ et $f(b) = b + 2$

En posant $f(a) = f(b)$ $\therefore a + 2 = b + 2$

d'où 2 on a $\therefore a = b$ **Donc la fonction f est injective**

b $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$, ensemble définition de $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Pour tout $a \in \mathbb{R} - \{2\}$, $b \in \mathbb{R} - \{2\}$ et $f(a) = \dfrac{3a - 5}{a - 2}$, $f(b) = \dfrac{3b - 5}{b - 2}$

En posant $f(a) = f(b)$ $\therefore \dfrac{3a - 5}{a - 2} = \dfrac{3b - 5}{b - 2}$

$3ab - 6a - 5b + 10 = 3ab - 6b - 5a + 10$

D'où $\therefore a = b$ **Donc la fonction est f est injective.**

A apprendre — Test de la droite horizontale

La fonction f $X \longrightarrow Y$ est une injection si la droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) en tous les points représentant l'ensemble image de f coupe la courbe de la fonction en un point unique.

Essayez de résoudre

5 Au paragraphe Essayez de résoudre (3) page (19), démontrez que les courbes représentent des fonctions injectives.

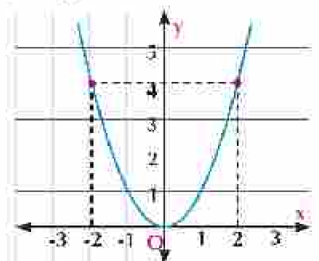
(6) Démontrer que f: X ⟶ Y est une injection:

a $f(x) = 2x - 3$ **b** $f(x) = \frac{3x - 5}{4x + 3}$

Exemple

(5) Démontrez que la fonction f: X ⟶ Y telle que $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

Solution



$f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$ $\therefore f(-2) = f(2) = 4$

$\because -2 \neq 2$ $\therefore$ f La fonction n'est pas injective

On remarque que la droite horizontale en $y = 4$ coupe la courbe de la fonction en deux valeurs différentes de la variable x qui sont -2 et 2.

Essayez de résoudre

(7) Démontrez que les fonctions f: X ⟶ Y suivantes sont injectives

a $f(x) = x^2 - 1$ **b** $g(x) = x^2 - 5x + 6$

Pensé critique : Soit f une fonction paire, peut-elle être une fonction injective ? Expliquez.



Exercices 1 - 2



(1) Indiquez si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x , par rapport à l'axe des y ou par rapport au point d'origine. Expliquez la réponse.

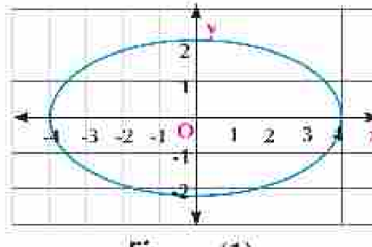


Figure (1)

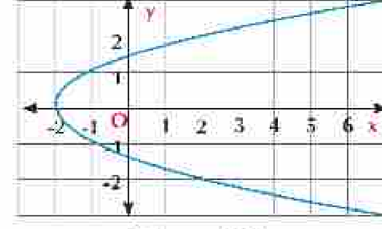


Figure (2)

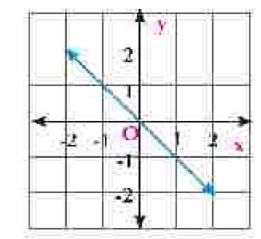


Figure (3)

(2) Trouvez l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes en déterminant sa parité.

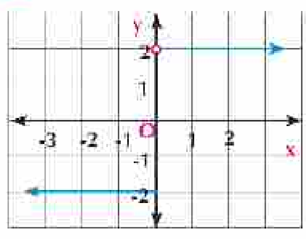


Figure (1)

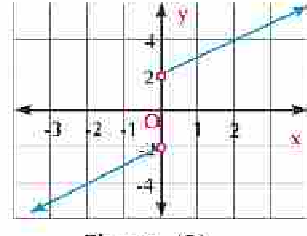


Figure (2)

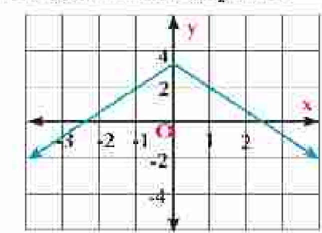


Figure (3)

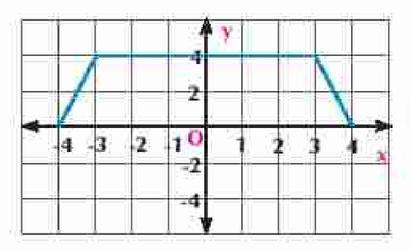


Figure (4)

Figure (5)

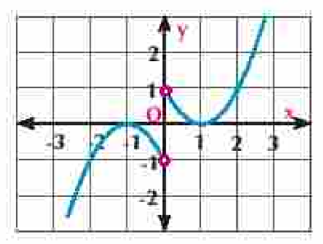


Figure (6)

3 Etudiez la parité des fonctions suivantes :

a $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ b $f(x) = 3x - 4x^3$ c $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

d $f(x) = x^2 - 3x$ e $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 3}$ f $f(x) = x \cos x$

g $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$ h $f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$ i $f(x) = (x^2 + 1)^3$

4 Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions réelles définies par $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = 5x^2$, Parmi les fonctions suivantes, indiquez celle qui sont paires, celle qui sont impaires et celle qui ne sont ni paires ni impaires

a $f_1 + f_2$ b $f_1 + f_3$ c $f_1 \times f_2$ d $f_3 \times f_2$

5 Soient f et g des fonctions réelles définies par $f(x) = (3 - x)^2$ et $g(x) = (3 + x)^2$

Parmi les fonctions suivantes, indiquez celle qui sont paires, celle qui sont impaires et celle qui ne sont ni paires ni impaires.

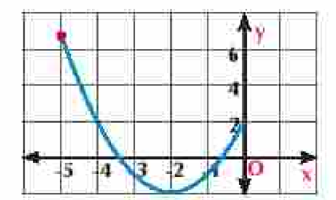
a $f + g$ b $f - g$ c $f \cdot g$ d $\frac{d}{h}$

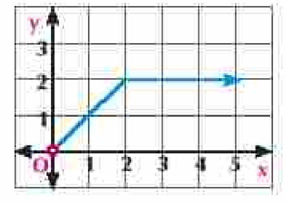
6 Tracez les courbes représentatives des fonctions suivantes. Du graphique, étudiez la parité de chaque fonction puis vérifiez le résultat algébriquement.

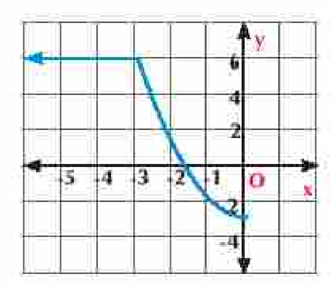
a $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

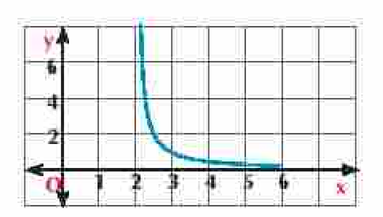
c $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 7x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ d $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(7) Observer les figures puis répondre aux questions suivantes:


Figure (1)


Figure (2)


Figure (3)


Figure (4)

i) Complétez la représentation graphique de la figure (1) pour obtenir une fonction paire sur son ensemble de définition.

ii) Complétez la représentation graphique de la figure (2) pour obtenir une fonction impaire sur son ensemble de définition.

iii) Trouvez l'ensemble image dans chaque cas , ensuite indiquez ce qui est injective.

(8) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez si la fonction est injective ou non en justifiant la réponse.

a $f(x) = 3x + 1$ b $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ c $f(x) = x^3 + 1$

d $f(x) = 2x^2 - x - 3$ e $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

(9) **En lien avec l'industrie :** Saïd travaille dans une usine de production des lampes électriques, il gagne 8 L.E par heure. En plus 0,3 L.E. pour chaque lampe produite.

a Ecrivez la règle de la fonction f qui exprime le salaire de Saïd s'il travaille 7 heures par jour

b La fonction f est-elle une injection ? Pourquoi?

(10) **Réflexion créative:** Tracez une courbe réalisant les conditions suivantes:

a La courbe passe par les points (0 ; -2) ; (2 ; 2) et (3 ; 7) et représente une fonction paire.

b La courbe passe par les points (0 ; 0) ; (-2 ; 1) et (-3 ; 5) et représente une fonction impaire.

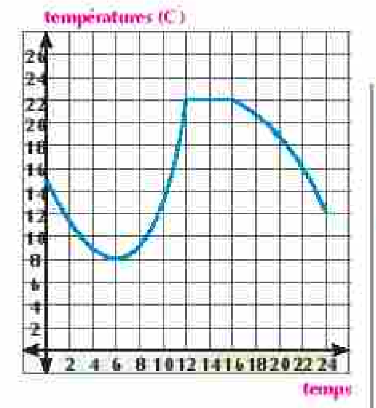
Sens de variation des fonctions

1 - 3



Réflichissez et discutez

Le graphique ci - contre indique les températures enregistrées au Caire pendant un jour observez la variation de température par rapport au temps, puis déterminez:



- **a** Les intervalles de décroissance de degrés de température.
- **b** Les intervalles de croissance de degrés de température
- **c** Les intervalles où la variation de degrés de température est constante.

Les propretés de la courbe aident à étudier la variation de la fonction pour déterminer les intervalles de croissance, de décroissance et les intervalles où la fonction est constante. Autrement dit c'est l'étude de la monotonie de la fonction ou son sens de variation.

Allez apprendre

- Sens de variation des fonctions.
- Utilisation du logiciel (Geogebra) pour tracer les courbes représentatives des fonctions

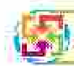


Vocabulaires de base

- Sens de variation
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Fonction constante

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

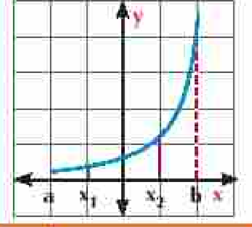


A apprendre

Fonction croissante:

On dit que la fonction f est croissante sur un intervalle $]a\ ,\ b[$ si pour tout $x_1 \in\ ]a\ ;\ b[$, $x_2 \in\ ]a\ ;\ b[$

si: $x_2 > x_1$ alors: $f(x_2) > f(x_1)$

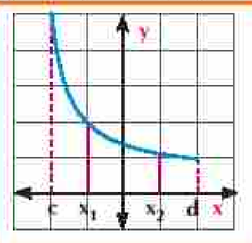


Fonction décroissante:

On dit que la fonction f décroissante sur un intervalle $]c\ ,\ d[$

si pour tout $x_1 \in]c\ ;\ d[$, $x_2 \in\ ]c\ ;\ d[$ si: $x_2 > x_1$

alors: $f(x_2) < f(x_1)$

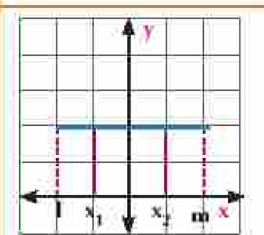


Fonction constante:

On dit que la fonction f est constante sur un intervalle $]\ell\ ;\ m[$

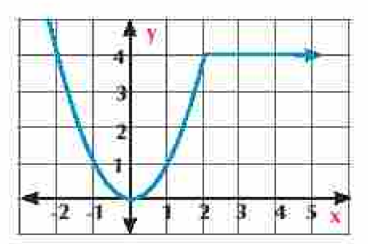
si pour tout $x_1 \in]\ \ell\ ;\ m[$, $x_2\ \in]\ \ell\ ;\ m[$ si $x_2 > x_1$

alors: $f(x_2) = f(x_1)$





Exemple

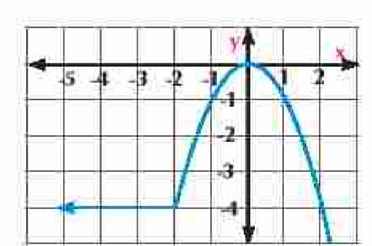


(1) Etudiez le sens de variation de la fonction représentée dans la figure ci-contre.

Solution

- La fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$
- La fonction est croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$
- La fonction est contante sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty\ [$

Essayez de résoudre

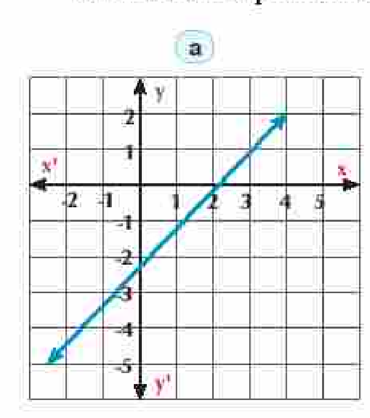


(1) Dans la figure ci-contre:
Etudiez les intervalles où la fonction est croissante, les intervalles où la fonction est décroissante et les intervalles où la fonction est constante.

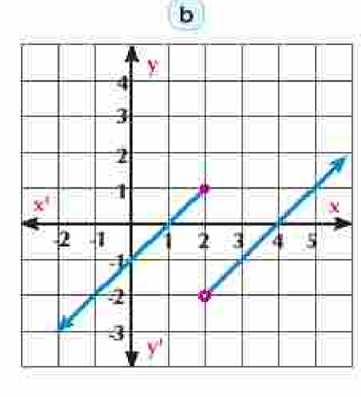
Exemple

(2) Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions $f: X \longrightarrow Y$, si $y = f(x)$ Du graphique, déduisez l'ensemble image et étudiez le sens de variation de chaque fonction.

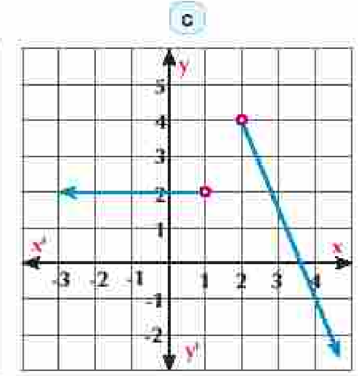
a



b



c



Solution

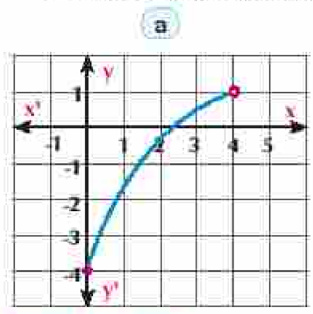
(a) L'ensemble définition de $f = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$, L'ensemble image de $f =]-\infty\ ;\ +\infty[$ la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$

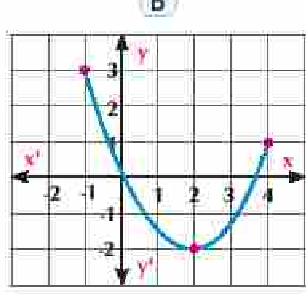
(b) L'ensemble définition de $f =]-\infty\ ;\ 2] \cup]2\ ;\ +\infty\ [=]-\infty\ ;\ +\infty[$
la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$, la fonction est croissante sur $]\ 2\ ;\ +\infty[$

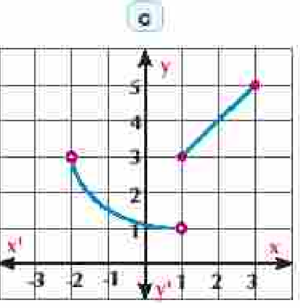
(c) L'ensemble définition de $f =]\ -\infty\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$, L'ensemble image de $f =]-\ \infty\ ;\ 4[$
la fonction est constante sur $]-\infty\ ;\ 1[$, la fonction est décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$

Essayez de résoudre

2. Dans chacune des figures suivantes, déduisez l'ensemble définition, l'ensemble image et étudiez le sens de variation de chaque fonction:

a


b


c


Pensé critique: La quelle parmi les figures précédentes représente une fonction injective? Pourquoi?

Utilisation des logiciels pour étudier quelques propriétés des fonctions

Les logiciels qui servent à tracer les courbes des fonctions sont multiples. *GeoGebra* est l'un de plus utile pour la tablette et l'ordinateur.

Activité **Utilisation du logiciel Geogebra pour construire des transformations des courbes des fonctions**

En Utilisation du *GeoGebra* représente graphiquement la fonction f et: $f(x) = x^3 - 3x + 2$, Du graphique:

a. Trouver l'ensemble définition et celui d'image de la fonction.

b. Déterminer le sens de variation de la fonction puis étudier la parité de la fonction

Pour représenter la fonction graphiquement, suivez les étapes suivantes:

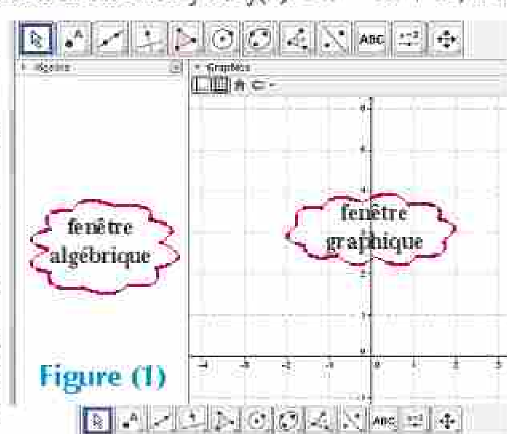


Figure (1)

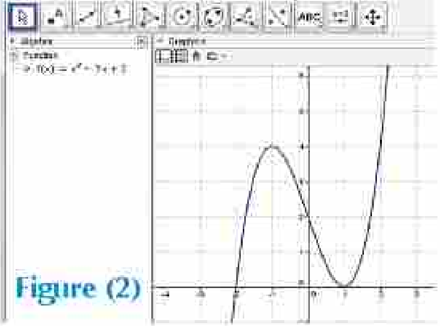
1- Ouvrez la fenêtre algèbre et celle graphique du logiciel *GeoGebra* puis.

Appuyer sur *Graphics* et choisissez pour retrouver la fenêtre indiquée dans la **figure (1).**

2- Dans la fenêtre algébrique, écrivez la règle de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en utilisant la touche (Insérer) comme il est indiqué ultérieurement:



Puis appuyer sur le bouton La courbe apparaitra dans la partie graphique de l'écran, et la règle apparaitre dans la partie algébrique **Figure (2)**


Figure (2)

3- Pour déterminer un point de la courbe choisissez  de la barre outils puis choisissez un nouveau point de la fenêtre. Déplacez le curseur jusqu' à ce que vous arriviez au point souhaité sur la courbe et cliquez sur insérer pour faire apparaitre le point sur la courbe, les coordonnées du point apparaissent dans la fenêtre algébrique comme dans la figure (3).

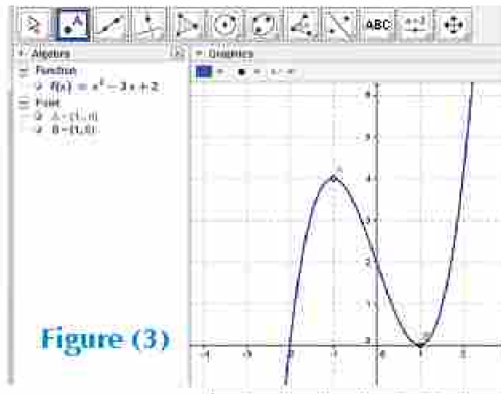


Figure (3)

Da la représentation graphique, on trouve que:

a L'ensemble définition de la fonction f =]-∞ ; +∞[, l'ensemble image de la fonction f =]- ∞ ; +∞[

b La fonction est croissante sur]- ∞ ; -1[, décroissante sur]-1 ; 1[, croissante sur]1 ; +∞[. La fonction n'est ni paire ni impaire.

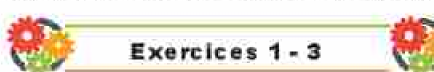
Remarque:

Le point de coordonnées (0 ; 2) est un point de symétrie de la courbe la fonction n'est pas une injection.

Entraînement sur l'activité

En Utilisation le logiciel *Geogebra* représente graphiquement la fonction f: $f(x) = 3x - x^3$

Du graphique déterminer le se de variation de la fonction puis étudiez la parité de la fonction.



Exercices 1 - 3

1 Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions. Du graphique, déduire l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction.

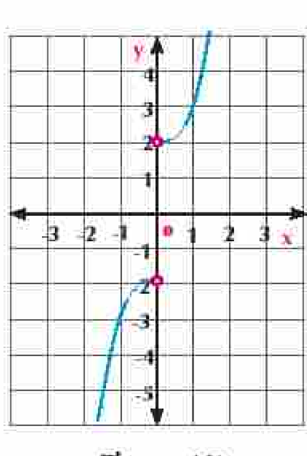


Figure (1)

Figure (2)

Figure (3)

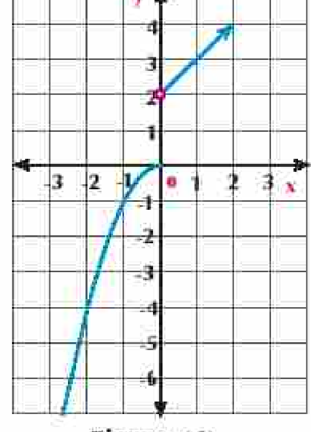
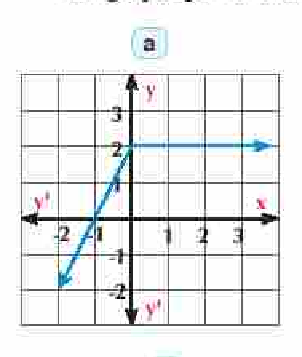
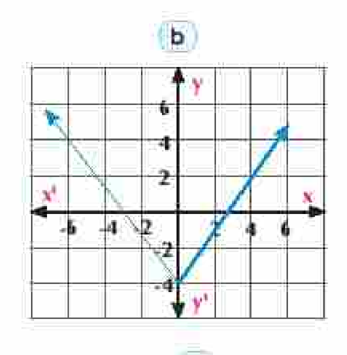


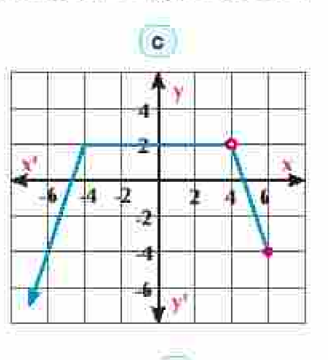
Figure (4)

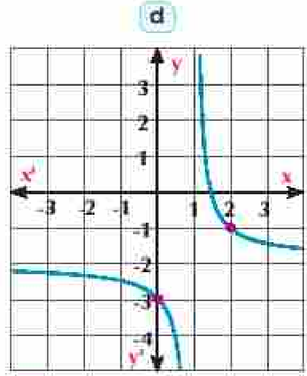
2 Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions.

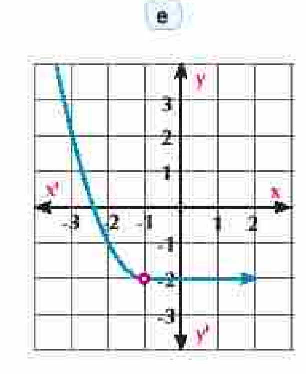
Du graphique, déduisez l'ensemble image et étudiz le sens de variation de chaque fonction.

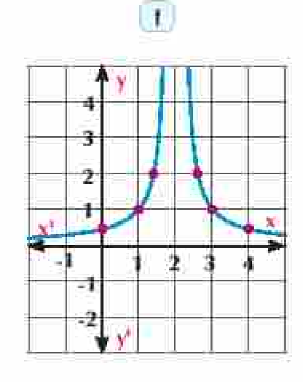
a


b


c


d


e


f


3 Soit f: $[-2\ ,\ 6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

a Représentez graphiquement la fonction f. Du graphique: déduisez l'ensemble définition de la fonction et étudier son sens de variation..

b La fonction est elle injective ? Vérifiez votre réponse.

4 **Pensé créative**

Si la fonction est toujours croissante ou décroissante sur son l'ensemble définition, alors la fonction est injective? Vérifiez votre réponse.

5 Dans chacun des cas suivants, utilisez un logiciel de graphisme pour représenter la fonction f graphiquement puis déterminez si la fonction est paire ou impaire ou ni paire ni impaire puis vérifiez la réponse algébriquement.

a $f(x) = x^2 - 5$

b $f(x) = 4 - x^2$

c $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

d $f(x) = x^3$

e $f(x) = x^3 - 3x$

f $f(x) = \frac{-1}{x - 2}$

Unité (1)

1 - 4 Représentations graphiques des fonctions

Allez apprendre

- Fonctions polynômes (affine, carrée, cubique)
- Fonction valeur absolue (module)
- Fonction rationnelle
- Utiliser les transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions
  $y = f(x) + a$
  $y = f(x + a)$
  $y = f(x + a) + b$
  $y = -f(x)$
  $y = a\,f(x)$
  $y = a\,f(x + b) + c$
- Les transformations géométriques de quelques fonctions trigonométriques.

Vocabulaires de base

- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Verticale
- Horizontale
- Asymptote

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Fonction polynôme:

Vous avez déjà étudié les fonctions polynômes dont l'expression algébrique est sous la forme:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots + a_n x^n$$

où: a_0 , a_1 , a_2 , a_3 ,.. , $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$
L'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sont l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (sauf indication contraire). Ces fonctions sont appelées fonctions de degré n. Le degré d'une fonction polynôme non nulle est la plus grande puissance prise par la variable indépendante x. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques fonctions polynômes.

Remarquez:

1- Si $f(x) = a_0$ et $a_0 \neq 0$ alors f est appelée une fonction polynôme constante.
2- Les fonctions polynôme de premier degré sont appelées des fonctions affines, les fonctions de second degré sont appelées fonction carrées et celles du troisième degré sont appelées fonctions cubes.
3- Si on additionne ou soustrait des fonctions de puissances différentes, on obtient une fonction polynôme.
4- Les zéros d'une fonction polynôme sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction avec l'axe des abscisses.
5- Deux fonctions polynôme f , g sont égales si elles ont le même f degré et les coefficients correspondants sont égaux.

Exemple

1 Si f et g sont deux polynômes telles que $f(x) = (a\,x + 5)^2$,
$g(x) = 9x^2 + 30\,x + c - 4$, et $f(x) = g(x)$, trouvez les valeurs de a et c.

Solution

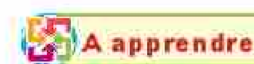
$f(x) = (a\,x + 5)^2 = a^2\,x^2 + 10a\,x + 25$
$\because\ f(x) = g(x)$ $\quad\therefore$ Les coefficient de puissance de x sont égaux
Comparons les coefficients des x : $10a = 30$ $\quad\therefore\ a = 3$
Les termes constants: $c - 4 = 25$ $\quad\therefore\ c = 29$

Essayez de résoudre

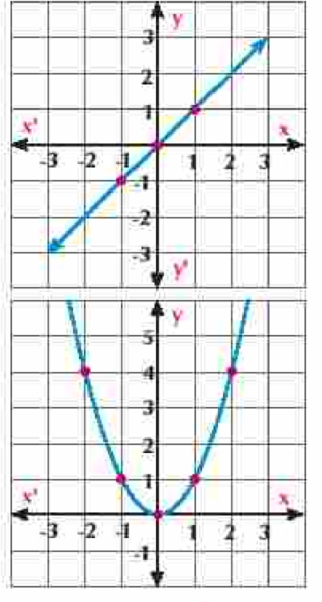
1 Si $f(x) = (a + 2\,b)\,x^3 - c\,x + 4$, $g(x) = 7x^3 + 5x + (a - b)$
trouez les valeurs de a , b et c pour que $f(x) = g(x)$

Tracer les courbes représentatives des fonctions:

I) Fonctions polynôme


A apprendre

Le graphique ci-contre $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:



1) $f(x) = x$

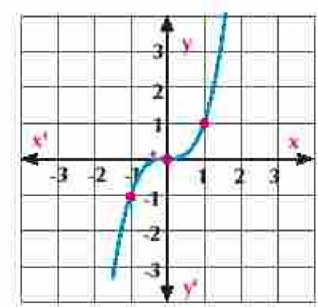
La fonction f associe chaque nombre à lui-même, elle est représentée par une droite passant par le point de coordonnées (0 ; 0) et de pente = 1

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire , f est croissante sur $\mathbb{R}$)

2) $f(x) = x^2$

La fonction f associe un nombre à son carré, elle est représentée graphiquement par une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et de sommet le point de coordonnées (0 ; 0)

(Vérifiez que: l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction paire , f est décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$,et f est croissante sur $]0\ ; +\infty[$)



3) $f(x) = x^3$

La fonction f associe le nombre par son cube, elle représentée graphiquement par une courbe dont le point de coordonnées (0 ; 0) est un centre de symétrie.

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire , f est croissante sur $\mathbb{R}$)

Exemple

(2) Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solution

1) Si $x < 2$, $f(x) = x^2$

On trace $f(x) = x^2$ pour tout $x \in]-\infty\ ; 2[$

en postant un rond vide au **point de coordonnées (2 ; 4)** Figure (1)

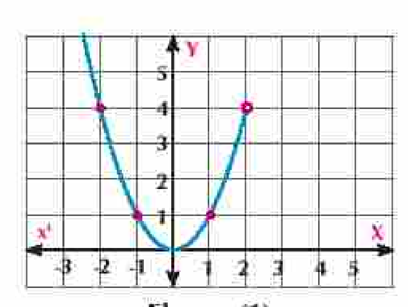


Figure (1)

2) Si $x > 2$; $f(x) = 4$

On trace la fonction constante $f(x) = 4$ pour tout x $]2 ; +\infty[$ dans le même graphique (2)

Remarquez que: l'ensemble définition de $f = \mathbb{R} - \{2\}$, l'ensemble image $f = [0 ; +\infty[$

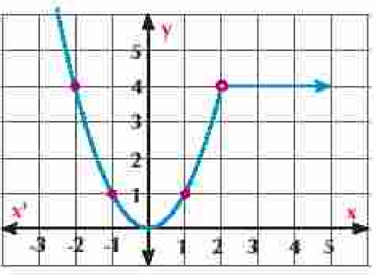


Figure (2)

Essayez de résoudre

2 Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

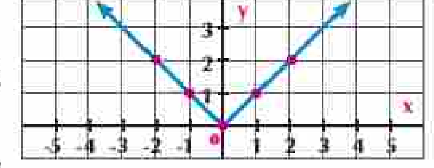
Déduisez l'ensemble image de la fonction puis étudiez le sens variation de f.



Fonction valeur absolue (module)

La forme la plus simple de la fonction valeur absolue (module) est $f(x) = |x|$; $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Remarquez que: $|-3| = |3| = 3$, $|0| = 0$. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$

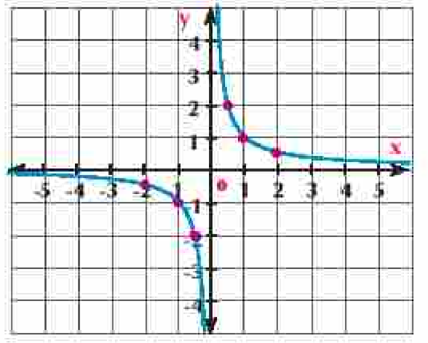
C'est à dire que: $|x| \geqslant 0$, $|-x| = |x|$, $\sqrt{x^2} = |x|$

La fonction f est représentée par deux demi–droites d'origine le point de coordonnée dont la pente de l'une = 1 et celle de l'autre = -1

(**Vérifiez que:** l'ensemble image de $f = [0 ; +\infty[$, f est une fonction paire , f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et f est croissante sur $]0 ; +\infty[$)

A apprendre

Fonction rationnelle



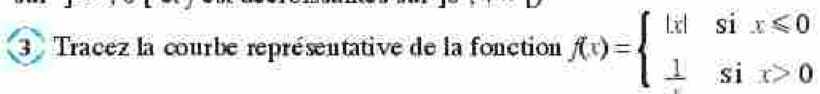
La forme la plus simple de la fonction rationnel est:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

La fonction f qui est appelée la fonction inverse, elle relie chaque nombre par son inverse, elle est représentée graphiquement par une hyperbole une courbe dont le point de coordonnées (0 ; 0) est un centre de symétrie

($x = 0$ et $y = 0$ sont les asymptotes de la courbe)

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire , f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et f est décroissantes sur $]0 ; +\infty[$)



3 Tracez la courbe représentative de la fonction $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Déduisez-en l'ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.

Transformations géométriques des courbes représentatives des fonctions

[I] Translation verticale de la courbe



Trvaillez avec votre comarade

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f: $f(x) = x^2$ en utilisant le logiciel **Geogebra**

2) Posez la le curseur sur le sommet de la courbe et tirez-la une unité verticalement vers le haut Observez la nouvelle règle de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ Figure (1).

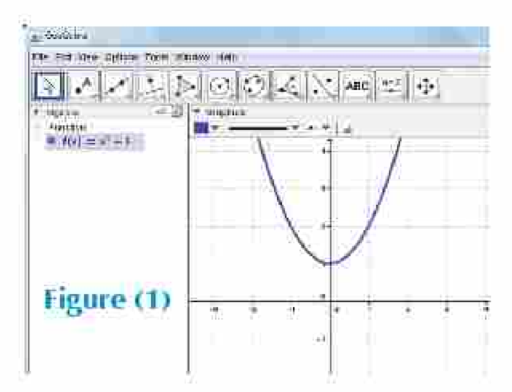


Figure (1)

3) Tirez le sommet de la courbe aux points des coordonnées (0 ; 2) et (0 ; 3) et rédigez vos remarques à chaque fois

4) Tirez la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ deux unités verticalement vers le bas et observez le changement de la règle de la fonction, vous trouvez une nouvelle règle $f(x) = x^2 - 2$ Figure (2)

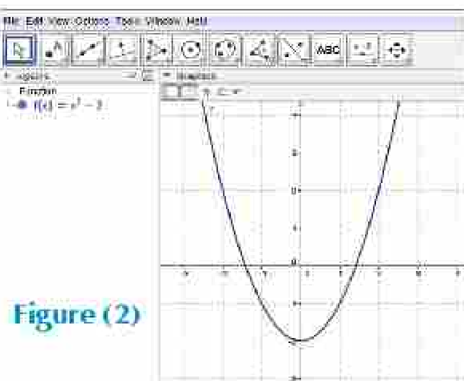


Figure (2)

Refechissez Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $f(x) = x^2 - 5$ à partir de la courbe de la fonction $f(x) = x^2$?

De ce qui précède, on remarque que :

Soient $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x^2 - 2$, alors :

1) la courbe de $g(x)$ est la même que (l'image de) la courbe de $f(x)$ par une translation d'une unité dans le sens positif de l'axe des ordonnées

2) la courbe de $h(x)$ est la même que (l'image de) la courbe de $f(x)$ par une translation de deux unités dans le sens négatif de l'axe des ordonnées

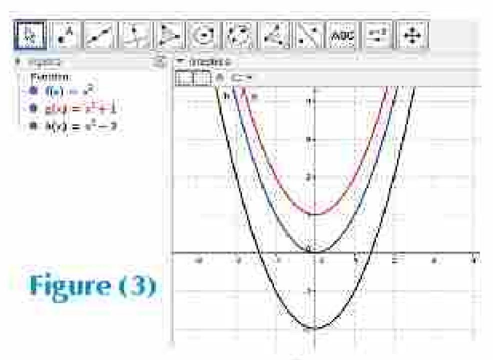


Figure (3)

Pensé critique : comment peut-on utiliser la courbe de la fonction $f(x) = x^3$ pour tracer les courbes des fonctions définie ci-dessous ?

a $g(x) = x^3 + 4$ **b** $h(x) = x^3 - 5$

A apprendre Tracer la courbe de y = f(x) + a

Pour une fonction f : la courbe d'équation $y = f(x) + \mathbf{a}$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation d'amplitude **a** unité dans la direction $\overrightarrow{oy}$, si $\mathbf{a} > 0$, ou $\overrightarrow{oy'}$ si $\mathbf{a} < 0$

Exemple

3 La figure ci – contre indique les courbes des fonction f, g et h. Ecrire la règle de g et celle de h sachant que $f(x) = |x|$

La courbe de $g(x)$ est la même que celle de $f(x)$, mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l'axe des ordonnées $\overrightarrow{oy'}$

$g(x) = f(x) - 3$

$\because f(x) = |x|$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ g(x) = |x| - 3$

$\because$ **La courbe de $h(x)$ est la même que celle de $f(x)$, mais déplacée 2 unités dans la direction positive de l'axe des ordonnées $\overrightarrow{oy}$**

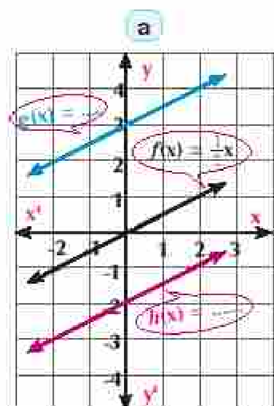
$\therefore h(x) = f(x) + 2$

$\because f(x) = |x|$ $\qquad\qquad$ $\therefore h(x) = |x| + 2$

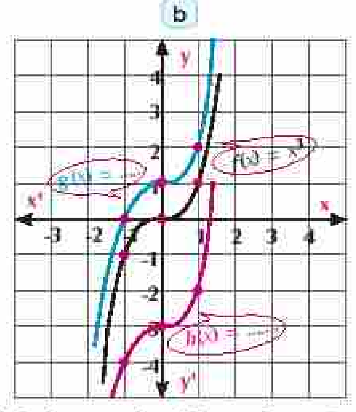
Essayez de résoudre

4 **Les figures suivantes indiquent les courbes représentatives des fonctions: f, g et h. Ecrivez les règles de g et h en fonction de $f(x)$ dans chaque figure**

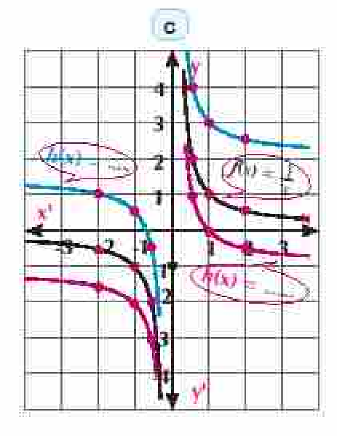
a



b



c



[II] Translation horizontal de la courbe d'une fonction

Travail coopératif

Travaillez avec votre camarade:

1) **Tracez la courbe représentative de la fonction f: $f(x) = |x|$ en utilisant le logiciel géogebra. Ecrivez la règle de la fonction dans la fenêtre Insérer comme suivant: abs(x) puis cliquer sur Insérer, la courbe de la fonction apparaît dans la fenêtre graphique et la règle de la fonction $f(x) = |x|$ dans la fenêtre algébrique Figure (1)**

Figure (1)

2) Tirez la courbe quelques unités horizontalement dans la direction positive de l'axe des abscisses. Observez la nouvelle règle dans la fenètre algébrique. **Figure (2)**

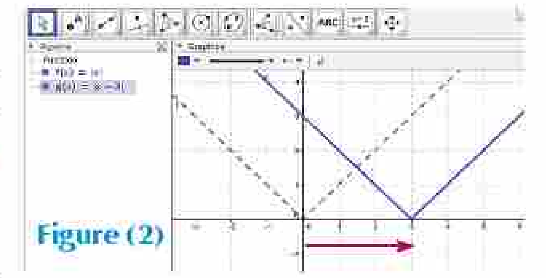


Figure (2)

3) Tirez la courbe dans la direction négative de l'axe des abscisses. Que remarquez-vous? **Figure (3)**

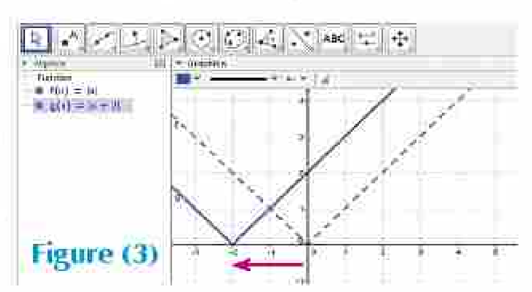


Figure (3)

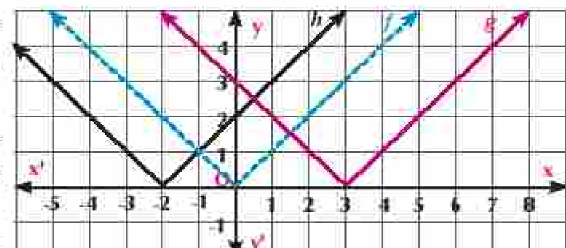
Réflichisse: Comment peut-on obtenir les courbes des fonctions g et h à partir de la courbe de la fonction f : $f(x) = |x|$ Sachant que $g(x) = |x - 5|$ et $h(x) = |x + 4|$.



Tracé de la courbe de y = f (x + a)

Pour une fonction f, la courbe d' équation $y = f(x + a)$ est la même que la courbe de $Y = f(x)$ par translation d'amplitude a unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$, ou $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$.

Remarquez que: Dans la figure ci-contre: $f(x) = |x|$



1) La courbe de la fonction g est la même que celle de f, mais déplacée 3 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox}$

∴ $g(x) = |x - 3|$ et l'origine de deux demi-droites est le points de coordonnées (3 ; 0).

2) La courbe de h est la même que celle de f, mais déplacée 2 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox'}$

∴ $g(x) = |x + 2|$, et l'origine de deux demi-droites est le points de coordonnées (-2 ; 0)

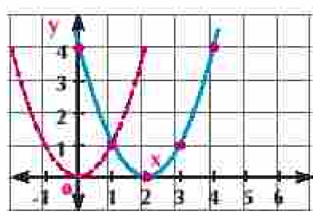
Exemple

4 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que:

a $g(x) = (x - 2)^2$ **b** $h(x) = (x + 3)^2$

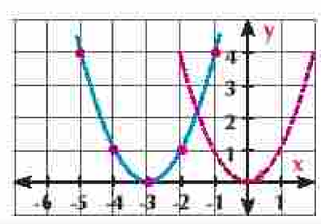
Solution

a



➤ La courbe de $g(x) = (x-2)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée deux unités dans la direction positive de l'axe des abscisses les coordonnées du sommet de la courbe sont (2 ; 0)

b



➤ La courbe de $h(x) = (x+3)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l'axe des abscisses les coordonnées du sommet de la courbe sont (-3 ; 0).

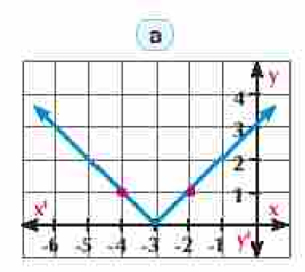
Essayez de résoudre

5. Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que:

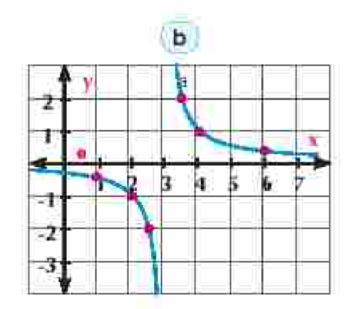
   a $g(x) = (x+4)^2$ b $h(x) = (x-3)^2$

6. Les figures suivantes indiquent les courbes représentatives des fonctions: Écrivez les règles dans chaque figure:

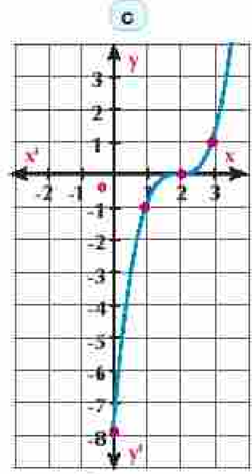
a



b



c



Pensé critique: Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $f(x) = x^2$, à partir de la courbe de la fonction $(x) = (x-3)^2 + 2$

Tracé de la courbe de $y = f(x+a) + b$

De ce qui précède, on déduit que: la courbe d'équation $y = f(x+a) + b$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation horizontale d'amplitude a unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$ (dans la direction $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$) , suivie par une translation verticale d'amplitude b dans la direction $\overrightarrow{oy}$ si $b > 0$ où $\overrightarrow{oy'}$ si $b < 0$

Essayez de résoudre

7) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que:

a) $g(x) = (x + 2)^2 - 4$ b) $h(x) = (3 - x)^2 - 1$

Exemple

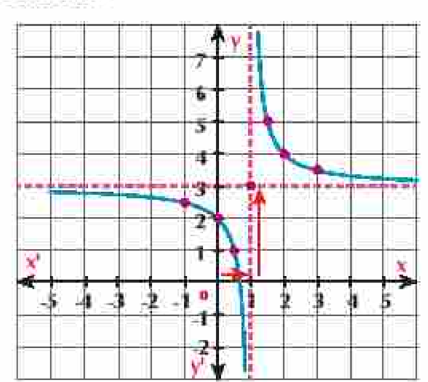
5) Tracez la courbe représentative de la fonction g telle que $g(x) = \frac{1}{x-1} + 3$ du graphique déduisez l'ensemble image et le sens de variation de la fonction.

Solution

La courbe de g est la même que celle de f et $f(x) = \frac{1}{x}$ par une translation d'amplitude une unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ (a = -1 < 0) , suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$. Le point coordonnées (1 ; 3) est le centre de symétrie de la courbe = ℝ - { 3}

Ensemble image de g

Sens de variation de g: est décroissante sur]- ∞ ; 1[et décroissante sur] 1 ; +∞[



Pensé critique: Peut-on dire que la fonction $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ est décroissante sur son ensemble définition? Justifiez votre réponse.

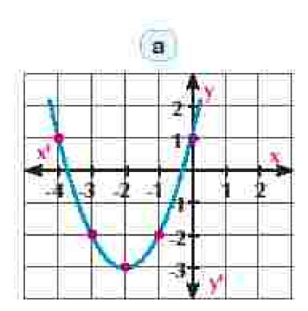
Essayez de résoudre

8) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$ pour reŕésenter chacune des fonctions définie ci-après:

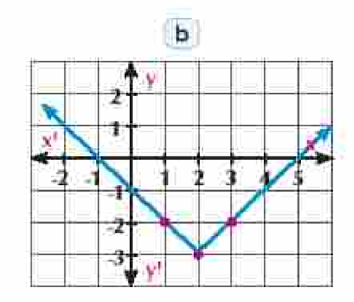
a) $g(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ b) $h(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

9) Ecrivez la règle de chacune des fonctions représentées graphiquement par les figures suivantes:

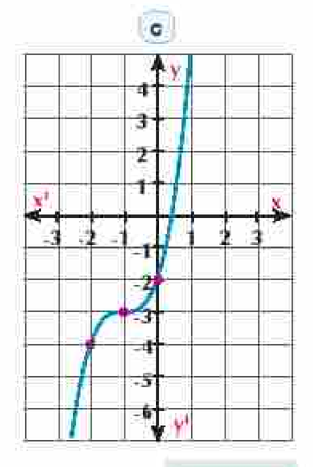
a



b



c





Utilisation de la calculatrice graphique pour tracer les fonctions

Pour Utiliser la calculatrice graphique pour tracer la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 4x + 1$, suivez les étapes suivantes:



1) Ouvrez la calculatrice puis appuyez sur MENU ensuite déplacez le curseur pour choisir *GRAPH*, enfin cliquez EXE pour préparer la touche Insérer, la fenêtre d'écriture apparaitra

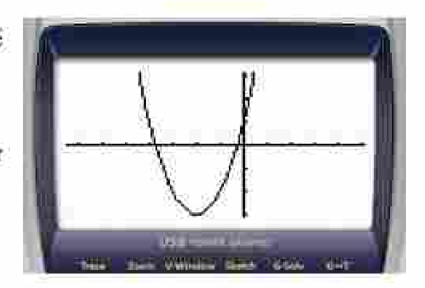
2) Écrivez en Y1 la fenêtre d'écriture, la règle de la fonction où la touche T, θ, X sert à écrire la variable x en appuyant sur les boutons suivantes:

T, θ, X x^2 + 4 T, θ, X + 1

3) Pour tracer la fonction appuyer sur

EXE ◯ EXE

La fenêtre graphique apparaîtra comme il est indiqué dans la figure ci-contre.



4) Utiliser la touche ◯ dans la fenêtre graphique pour étudier la fonction.

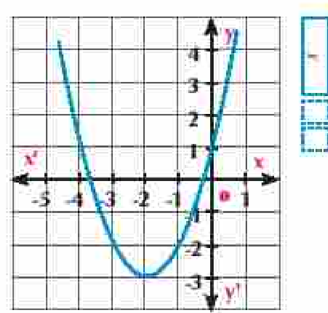
Remarquez que:

$f(x) = x^2 + 4x + 1$ en complétant le carré

$= (x^2 + 4x + 4) - 3$

$= (x + 2)^2 - 3$

C'est-à-dire que la courbe de la fonction f est le même que la courbe de la fonction g où $g(x) = x^2$ par une translation amplitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{ox'}$ suivi par une translation amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{oy'}$ qui est représenté dans la figure ci-contre

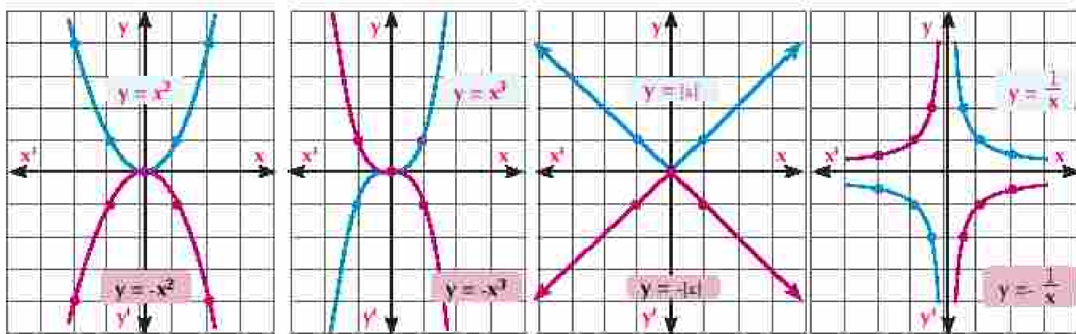


x	x	x^2
	1	x
		x

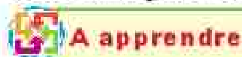
Application: En utilisant la calculatrice graphique, tracez la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x-2} + 4$ en déduisez l'ensemble définition et le sens de variation de la fonction.

[III] Symétrie de la courbe représentative d'une fonction par rapport à l'axe des abscisses:

Les figures suivantes montrent la symétrie de quelques fonctions usuelles par rapport à l'axe des abscisses.



Que remarquez-vous ? Et qu'en déduisez-vous?



A apprendre

Tracé de la fonction $y = -f(x)$ pour une fonction f, la courbe de $y = -f(x)$ est l'image de la courbe de $y = f(x)$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



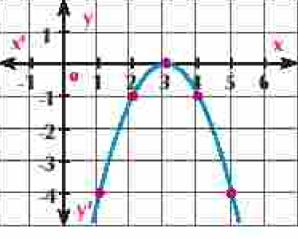
Exemple **Utilisation des transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions**

(6) Utilisez les courbes des fonctions usuelles pour tracer les courbes des fonctions g, h et i telles que:

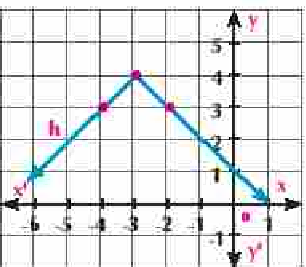
(a) $g(x) = -(x-3)^2$ (b) $h(x) = 4 - |x+3|$ (c) $i(x) = 2 - \frac{1}{x-3}$

Solution

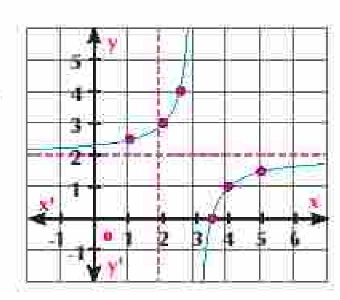
(a) La courbe de $g(x)$ est l'image de celle de $f(x) = x^2$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$. Les coordonnées du centre de la symétrie de la courbe sont (3 ; 0) la courbe est ouverte vers le bas.



(b) La courbe de $h(x)$ est l'image de celle de $f(x) = |x|$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox'}$, et d'une translation d'amplitude 4 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$ les coordonnées d'origine de deux demi-droites sont (-3, 4). La courbe est ouverte vers le bas.



c La courbe de $i(x)$ est l'image de celle de $f(x) = \frac{1}{x}$ dans la symétrie 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$, et d'une translation d'amplitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$, les coordonnées du centre de la courbe sont (3 ; 2).





Essayez de résoudre

10 Dans chacun des cas suivants, tracez la courbe de la fonction g telle que:

a $g(x) = 3 - (x+1)^2$ **b** $g(x) = -(x-3)^3$

c $g(x) = 3 - |x - 5|$

Puis justifier votre dessin en utilisant un logiciel ou une calculatrice graphique.

Exemple

Utilisation des transformations géométriques pour tracer les courbes des fonctions

7 En utilisant une transformation géométrique convenable, tracez les deux courbes des fonctions g, h telles que $g(x) = 4 - x^2$, $h(x) = |4 - x^2|$

Solution

i) Tracé de la courbe de g

La courbe de $g(x)$ est l'image de celle de $f(x) = x^2$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 4 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$ Figure (1).

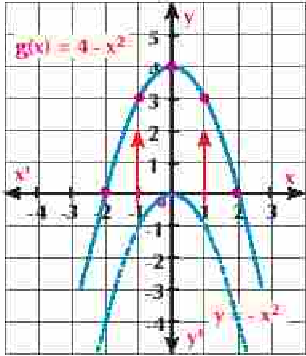


Figure (1)

ii) Tracé de la courbe de h

$\because h(x) = |4 - x^2|$ $\therefore h(x) = |g(x)|$

Alors l'ordonnée de tous les points de la courbe de h est positive où :

$h = |g(x)|$

$$\therefore y = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) > 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que la courbe de la fonction h se trouve dans le premier et le dexième quadrant Alors c'est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses de la courbe de g pour tout $g(x) < 0$ Figure **(2).**

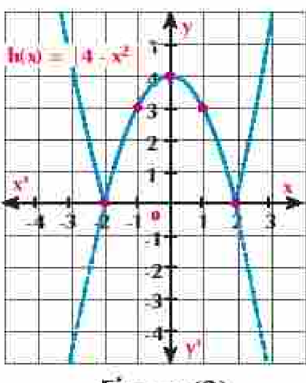
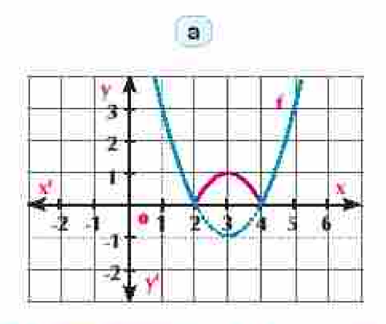
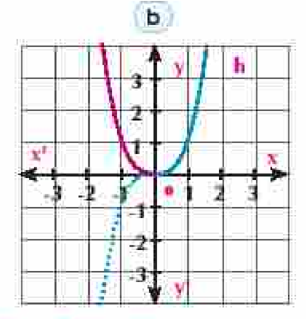


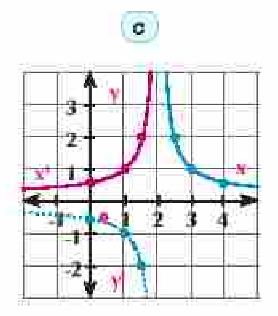
Figure (2)

Essayez de résoudre

11) Les figures ci-dessous montrent les courbes représentatives des fonctions f, g et h. Ecrivez la règle de chacune des fonctions dans chaque cas:

a


b


c


[IV] Dilatation de la courbe d'une fonction

Travail coopératif

Tracé de la courbe de $g(x) = a\,f(x)$

Travaillez avec votre camarade

1) Tracez la courbe de la fonction f: $f(x) = x^2$ en utilisant le logiciel *Geogebra* dans la fenetre Inserer, écrivez la règle de la fonction comme suivant



Une nouvelle fenêtre apparaitra (Figure 1) en choisissez *créer des curseurs*

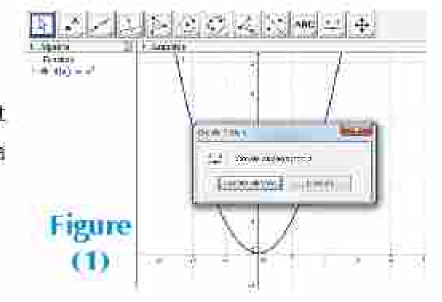


Figure (1)

2) Utilisez le curseur des valeurs pour choisir d'autres valeurs de a où a $1 < a$

Observez le changement de la courbe par rapport à la courbe de la fonction f pour tout $x \in \mathbb{R}$ Figure (2)

Faisez le meme pour $1 > a$ Figure (3)

Que remarquez-vous ? Qu'en déduisez-vous ?

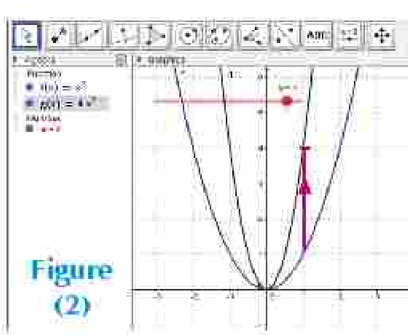


Figure (2)

A apprendre

Tracé de la courbe de $y = a\,f(x)$

Pour une fonction f: la courbe de $y = a\,f(x)$ où $a > 0$

Est une dilatation verticale de la courbe de $y = f(x)$: de coefficient a Cette dilatation est un agrandissement si $a > 1$ et est réduction si $a < 1$

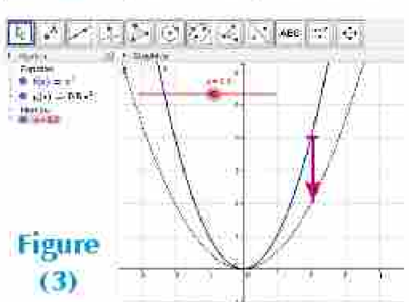


Figure (3)

Tracé de la courbe de la fonction h telle que $h(x) = a\,f(x + b) + c$

Exemple

Utilisation des transformations géométriques pour tracer les courbes des fonctions

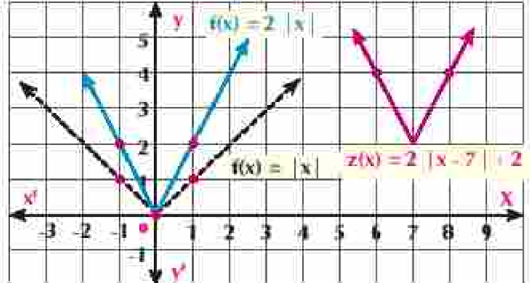
8) Utilisez la courbe de la foction f telle que $f(x) = |x|$ pour tracer les deux courbes des fonctions g et h telles que:

a) $g(x) = 2|x|$ b) $h(x) = 2|x - 7| + 2$

Solution

a) Tracé la courbe de $g(x)$ est une dilatation verticale de la courbe de la fonction f le coefficient a $= 2 > 0$ alors pour tout:
pour tout $(x\ ;\ y) \in$ graphe de f
$(x\ ;\ 2y) \in$ graphe de g

b) La courbe de $h(x)$ est l'image de celle de $g(x)$ par une translation d'amplitude 7 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$, suivi d'une translation d'amplitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$





Essayez de résoudre

12) Utilisez la courbe de la foction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes des fonctions g et h telles que:

a) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ b) $h(x) = 2 - \frac{1}{2}(x - 5)^2$

Justifiez votre dessin en utilisant un logiciel ou une calculatrice graphique puis déterminez l'ensemble image et le sens de variation

Activité

Application des transformations géométriques étudiées pour les fonctions de sinus de cosinus

Fonctions trigonométriques (courbe de la fonction sinus):

I: Translation de la courbe de la fonction dans la direction de l'axe des abscisses :

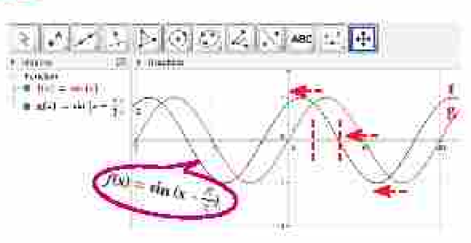
1) Utiliser le logiciel (*GeoGebra*) et régler ses paramètres pour que la graduation de l'axe des abscisses soit en radians. Pour cela, avec un clic-droit sur l'interface, choisir (axe des abscisses), dans la dernière ligne puis choisir le mode de graduation (π).

2) Dans la zone virtuelle, située en bas de l'écran, tapez l'instruction **sin (x)** puis appuyer sur (**enter**) La courbe de la fonction sinus s'affiche. La couleur et l'épaisseur de la courbe peuvent être réglées par un clic-gauche sur la courbe de la fonction suivi par le choix de la couleur désirée et l'épaisseur de la courbe etc...

3) De la même manière, on tape: **((3/π) + x) sin** qui veut dire: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ puis on appuie sur (**enter**) puis on accorde une autre couleur à la nouvelle courbe.

4) **Comparez les deux courbes. Que remarquez-vous?**

On remarque que:



La courbe de la fonction sinus a été translatée horizontalement de $\frac{\pi}{3}$ vers la gauche, la deuxième fonction et la fonction **sin x** ont le même [-1 ; 1], la fonction $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ n'est ni paire ni impaire car elle n'est ni symétrique par rapport à l'axe des y ni par rapport au point d'origine.

Pour réfléchir:

➢ Quelle translation dans la direction de l'axe des x peut porter la courbe de la fonction $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

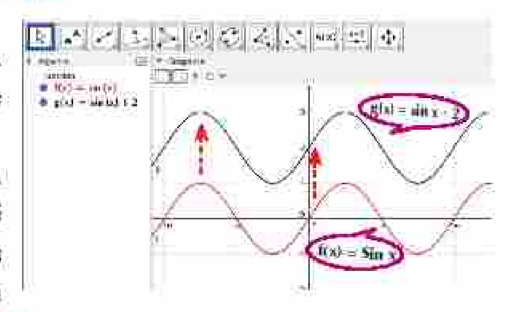
II: Translation de la courbe de la fonction dans la direction de l'axe des Y.

1) Tracez la courbe représentative de la fonction $f: f(y) = \sin x$ comme précédemment.

2) Tracez, en une autre couleur, la courbe représentative de la fonction$(x) = \sin x + 2$

Comparez les deux courbes. Que remarquez-vous?

Dans la représentation graphique:



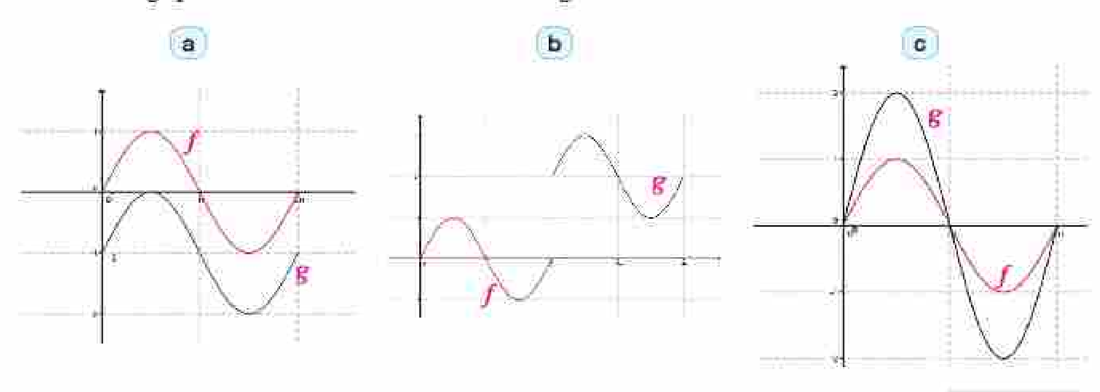
on trouve que la courbe de la deuxième fonction est obtenue de la courbe de **y = sin x** , par une translation de 2 unités vers le haut.

On remarque que l'ensemble image de la deuxième fonction est **[1 ; 3]** : car on a translaté la courbe de la première fonction de 2 unités dans la direction positive de l'axe des y. On remarque également que la fonction **y = sin x + 2** n'est ni paire ni impaire.

Pensé critique:

Dans chacune des figures ci-dessous:

Décrivez les transformations géométriques de la courbe de la fonction f pour tracer la courbe de la fonction g, puis déterminez son ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.



 **Exercices 1 - 4** 

1. Trouez les valeurs de a , b et c pour que $f(x) = g(x)$ sachant que

$f(x) = (a + b)\, x^3 + 3x - 2$, $g(x) = 5x^3 + (a + c)\, x + b$

2. Tracez la courbe représentative de la fonction f , du graphique déduisez l'ensemble image puis étudiez le sens variation de la fonction de f

a $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant -2 \end{cases}$

c $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ |x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données:

3. La courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2 + 4$ est le même que celle de la fonction $f(x) = x^2$ par une translation d'amplitude 4 unités dans la direction

a $\overrightarrow{ox}$ **b** $\overrightarrow{ox'}$ **c** $\overrightarrow{oy}$ **d** $\overrightarrow{oy'}$

4. La courbe représentative de la fonction $g(x) = |x + 3|$ est le même que celle de la fonction $f(x) = |x|$ par une translation d'amplitude 3 unités dans la direction

a $\overrightarrow{ox}$ **b** $\overrightarrow{ox'}$ **c** $\overrightarrow{oy}$ **d** $\overrightarrow{oy'}$

5. Les coordonnées du sommet de la courbe de la fonction $f(x) = (2 - x)^2 + 3$ sont

a (2 ; 3) **b** (2 ; -3) **c** (-2 ; 3) **d** (-2 ; -3)

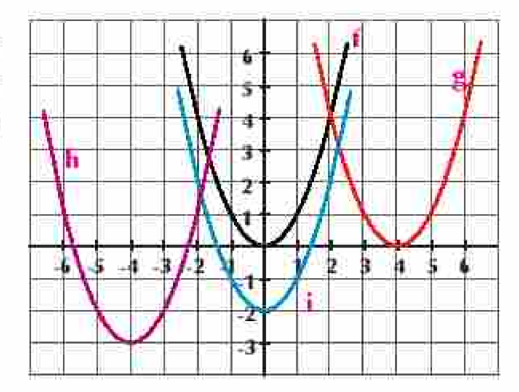
6. Les coordonnées du centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x - 3} + 4$ sont

a (3 ; -4) **b** (-3 ; -4) **c** (3 ; 4) **d** (-3 ; 4)

7. Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction $f(x) = x^2$. La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y

Ecrivez les règle de chacune des fonctions:

➤ g , h , i

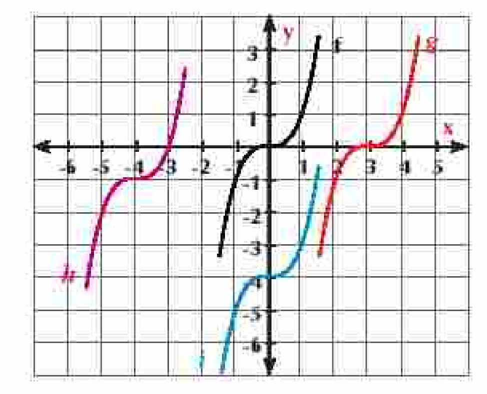


8 Dans la figure: ci-contre, on tracé la courbe de la fonction f: $f(x) = x^3$ courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y



Ecrivez les règle de chacune des fonctions:

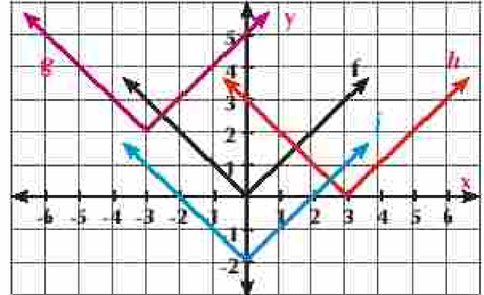
➢ g , h et i



9 Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction $f(x) = |x|$
La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y.

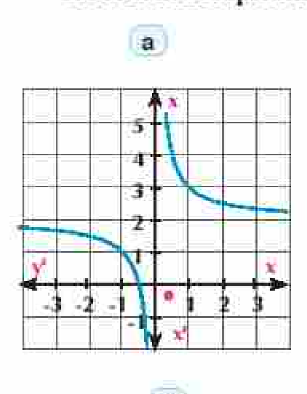
Ecrivez les règle de chacune des fonctions:

➢ g , h et i

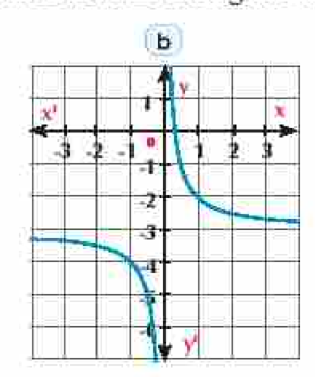


10 Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction f : $f(x) = \frac{1}{x}$, La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y Ecrivez les règles de chacune des fonctions représentées dans chacune des figures ci-dessous:

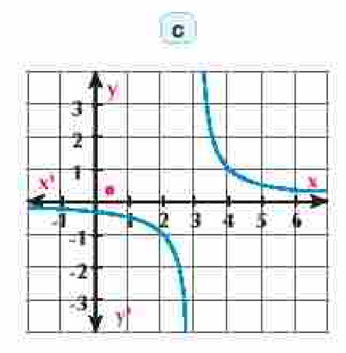
a



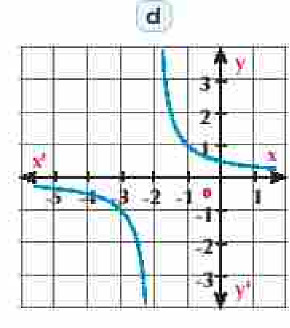
b



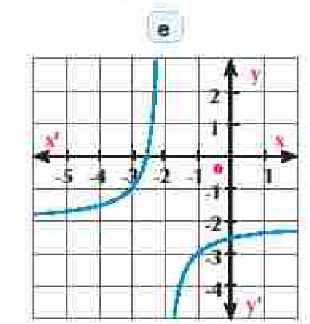
c



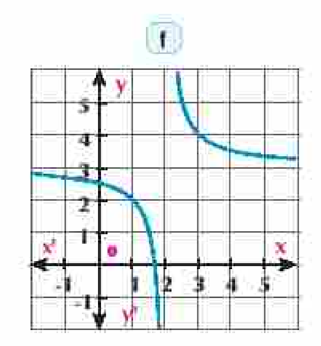
d



e



f



(11) Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous.

a $f_1(x) = x^2 - 4$ b $f_2(x) = x^2 + 1$ c $f_3(x) = (x + 1)^2$
d $f_4(x) = (x - 3)^2$ e $f_5(x) = (x - 1)^2 - 2$ f $f_6(x) = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}$

(12) Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous

a $f_1(x) = |x| + 1$ b $f_2(x) = |x| - 3$ c $f_3(x) = |x + 2|$
d $f_4(x) = |5 - x|$ e $f_5(x) = |x + 2| + 1$ f $f_6(x) = |x - 3| - 2$

➢ **Puis déterminez les coordonées des points d'intersection de la courbe avec les axes des coordonnées dans chaque cas.**

(13) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^3$. pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $f_1(x) = f(x) - 3$ b $f_2(x) = f(x) + 1$ c $f_3(x) = f(x - 2)$
d $f_4(x) = f(x + 3)$ e $f_5(x) = f(x - 2) - 1$ f $f_6(x) = f(x + 3) + 2$

➢ **Puis déterminez les coordonnées de centre de symétrie dans chaque cas.**

(14) Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $k(x) = f(x + 1)$ b $k(x) = f(x - 3)$ c $k(x) = f(x) + 2$
d $k(x) = f(x) - 4$ e $k(x) = f(x + 2) - 5$ f $k(x) = f(x - 2) + 2$

(15) Utilisez la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous

a $f_1(x) = 4 - x^2$ b $f_2(x) = -(x - 3)^2$ c $f_3(x) = 2 - (x + 3)^2$

(16) Utiliset la courbe de la fonction f telle que: $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous.

a $f_1(x) = 2 - |x|$ b $f_2(x) = -|x + 5|$ c $f_3(x) = 4 - |x - 2|$
d $f_4(x) = 2|x|$ e $f_5(x) = -2\,|x - 1|$ f $f_6(x) = 5 - 2\,|x + 2|$

(17) En utilisant les transformations géométriques, tracez la courbe représentative de la fonction f définie ci-dessous. Puis étudiez le sens de variation de f dans chacune des cas.

a $f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b $f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } -4 \leqslant x < 0 \\ -x^2 - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

c $f_3(x) = x\,|x| - 1$ d $f_4(x) = \frac{2x}{x + 1}$

(18) Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$, Tracez la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $l(x) = |f(x)|$ b $l(x) = 2 + |f(x)|$ c $l(x) = |f(x - 2)|$

(19) Dans chacun des cas suivants, tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ (b) $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$, $x \in [-1 ; 4]$

(20) **En lien avec la géométrie la commerce:** Un commerçant de céréales paye 50 livres égyptiennes pour chaque tonne entré ou sorti de son entrepôt comme frais de chargement. Ecrivez la règle de la définition de la fonction qui exprime le cout de chargement et représente-la graphiquement.

(21) **En lien avec la mécanique:** Un corps parcourt une distance d mètres en 3 minutes s'il se meut à une vitesse constante de 30 mètres/minutes. Montrez que la vitesse v est inversement variée avec le temps t pour cette distance. Ecrivez la règle de la fonction qui exprime la vitesse et le temps, représentez-la graphiquement puis trouvez le temps nécessaire pour que le corps parcoure la même distance s'il se meut à une vitesse constante de 45 mètres/minutes.

(22) **En lien avec les nouvelles communautés urbaines:** On a privé des parcelles de terrains rectangulaires pour l'hebergement des jeunes gens dans une des nouvelles communautés urbaines. Si la longueur de chaque parcelle est x mètres et son aire est 400 mètres carrés.

(a) Montrez que la longueur du terrain est inversement proportionnelle avec sa largeur.

(b) Ecrivez la règle de la fonction qui exprime la largeur du terrain en fonction de sa loongueur et représentez-la graphiquement.

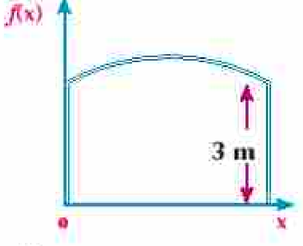
(c) Du graphique trouvez la largeur du terrain dont la longueur est 25 mètres et vérifiez votre solution algèbriquement.

Réflexion créative:

(23) Soient x_1, x_2 les zéros de la fonction f: $f(x) = (x - a)^2 - 8$ telle que où $x_1 < x_2$ et x_3, x_4 les zéros de la fonction g: telle que $g(x) = 5 - (x - a)^2$ où $x_3 < x_4$, $a \in \mathbb{R}$. Laquelle parmi les propositions suivantes est vraie?

(a) $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ (b) $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$

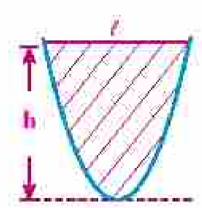
(c) $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ (d) $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$



(24) **En lien avec l'industrie:** Dans la figure ci-contre : Les deux hauteurs latérales d'un potail métalique bombé est de 3mètres de longueur chacune et la forme de son arc superieure suit la courbe de la fonction f telle que f: $f(x) = a(x - 2)^2 + 4$ Trouvez:

(a) La valeur de a (b) La hauteur maximale de la portail

(c) La largeur de la portail



(25) **En lien avec la géométrie:** L'aire de la partie comprise entre la courbe de fonction du second et le segment horizontal joignant des points de la courbe est donnée par la relation: $A = \frac{2}{3} \ell h$

(a) Trouvez l'aire de la partie comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction f: $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en unités carrées

(b) Tracez sur le meme quadrillage les deux courbes des fonctions f et g où $g(x) = |x - 3| - 2$ Puis trouvez l'aire de la partie comprise entre les deux courbes en unités carrées.

Unité (1)

Equations et inéquations

1 - 5

[I] Résolution des équations



Travail coopératif

Allez apprendre

- Résolution des équations de la valeur absolue graphiquement
- Résolution des équations de la valeur absolue algébriquement
- Résolution des inéquations de la valeur absolue graphiquement.
- Résolution des inéquations de la valeur absolue algébriquement
- Modélisation des problèmes et des applications quotidiennes et sa résolution en utilisant les équations et inéquation de la valeur absolue

Vocabulaires de base

- Equation
- Inéquation
- Résolution graphique

Aides pédagogiques

- Feuilles quadrillées
- Logiciels de graphisme

Dans un même repère tracez les courbes représentatives de deux fonctions f et g où f est la fonction de valeur absolue et g est fonction affine observez le graphique puis répondre:

a) Quel est le nombre des points probable d'intersection de deux courbes?

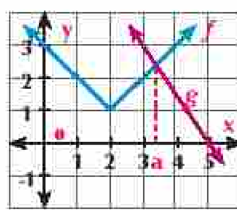
b) Les points d'intersection de deux courbes vérifient-ils tes règles de deux fonctions?

c) Utilisez une calculatrice programmable la pour justifier votre réponse.

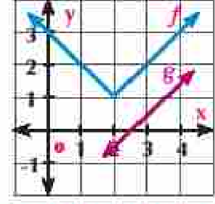
Remarquez que:

1) Aux points d'intersections, s'ils existent, on a $f(x) = g(x)$ et réciproquement pour tout x appartenant à l'ensemble de définition commune de deux fonction.

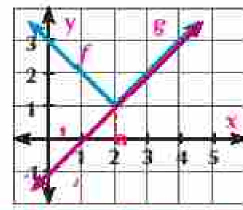
2) Pour deux fonctions f et g l'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses de points d'intersection comme il est indiqué dans les figures suivantes:



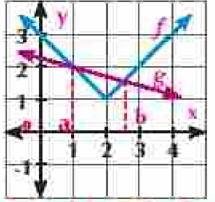
Ensemble solution = {a}



Ensemble solution = ϕ



Ensemble solution = [a ; +∞[



Ensemble solution = {a ; b}

Résolution de l'équation: | a x - b| = c

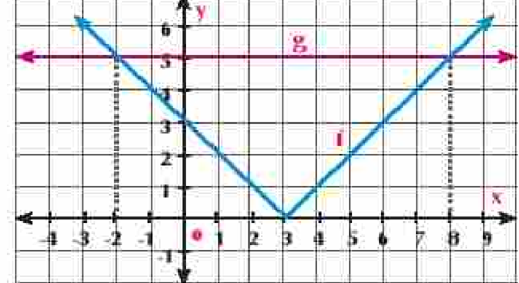


1) Résoudre l'équation: $|x - 3| = 5$ graphiquement et algébriquement.

Solution

Posons $f(x) = |x - 3|$ et $g(x) = 5$

1) On trace la courbe de la fonction f $f(x) = |x - 3|$ en déplaçant la courbe de la fonction $h(x) = |x|$ trois unités dans la direction de $\overrightarrow{ox}$



2) Dans le même quadrillage, on trace la courbe de la fonction $g(x) = 5$, où g qui est une fonction constante Sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisse et passant par le point de coordonnées (0 ; 5)

∵ Les coordonnés des points d'intersection des deux courbes sont (-2 ; 5) , (8 ; 5)

∴ L'ensemble solution de l'équation est {-2 ; 8}

Solution algébrique :

D'après la définition de la fonction valeur absolue $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{pour } x > 3 \\ -x + 3 & \text{pour } x < 3 \end{cases}$

Pour $x > 3$: $x - 3 = 5$ c'est-à-dire $x = 8 \in]3 ; +\infty[$

Pour $x \leqslant 3$: $-x + 3 = 5$ c'est-à-dire $x = -2 \in]-\infty ; 3]$

L'ensemble solution de l'équation est {- 2 ; 8} ce qui confirme la solution graphique

Essayez de résoudre

1 Résoudre chacune des équations suivantes graphiquement et algébriquement

a $|x| - 4 = 0$ **b** $|x| + 1 = 0$ **c** $|x - 7| = 5$

Quelques propriétés de la valeur absolue d'un nombre

A apprendre

1) $|a\,b| = |a| \times |b|$ par exemple

$|2 \times -3| = |-6| = 6$ et $|2| \times |-3| = 2 \times 3 = 6$

2) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

L'égalité est obtenue si les deux nombres a et b sont de même signe. Par exemple:

$|4 + 5| = |4| + |5| = 9$ et $|-4 - 5| = |-4| + |-5| = 9$

Remarquez que:

1) Si : $|x| = a$ alors: $x = a$ **ou** $x = -a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^+$

2) Si : $|a| = |b|$ alors: $a = b$ **ou** $a = -b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

3) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

Résolution de l'équation $|a\ x + b| = c\ x + d$

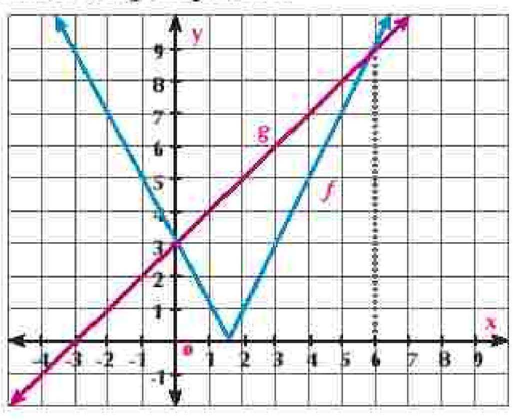
Exemple

(2) Résoudre l'équation: $|2\,x - 3| = x + 3$ graphiquement et algébriquement.



Solution

Soient $f(x) = |2x - 3|$, $g(x) = x + 3$

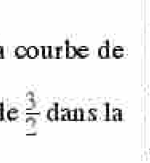


Solution graphique:

f: $f(x) = |2x - 3| = |2(x - \frac{3}{2})|$

$f(x) = 2\ |x - \frac{3}{2}|$

La courbe de f est la même que la courbe de $2|x|$ par une translation d'amplitude $\frac{3}{2}$ dans la direction $\overrightarrow{ox}$



g: $g(x) = x + 3$ est représentée graphiquement par une droites de pente = 1 et passant par le points de coordonnés (0 ; 3)

$\because$ Les coordonnés des points d'intersection des courbes (0 ; 3) et (6 ; 9)

$\therefore$ L'ensemble solution de l'équation est: **{0 ; 6}**

Solution algébrique:

$$\because\ |2x - 3| = \begin{cases} 2\,x - 3 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{3}{2} \\ -2\,x + 3 & \text{si} \quad x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ Pour $x \geqslant \frac{3}{2}$ on a $2x - 3 = x + 3$ d'où $x = 6 \in [\ \frac{3}{2}\ ;\ +\infty\ [$

Pour $x < \frac{3}{2}$ on a $-2x + 3 = x + 3$ d'où $x = 0 \in\ ]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\ [$

$\therefore$ L'ensemble solution de l'équation est: **{0 ; 6}**

Essayez de résoudre

(2) Résoudre chacune des équations suivantes graphiquement et algébriquement.

(a) $|2x + 4| = 1 - x$ (b) $|2x + 5| = x - 4$ (c) $|x - 3| = 3 - x$

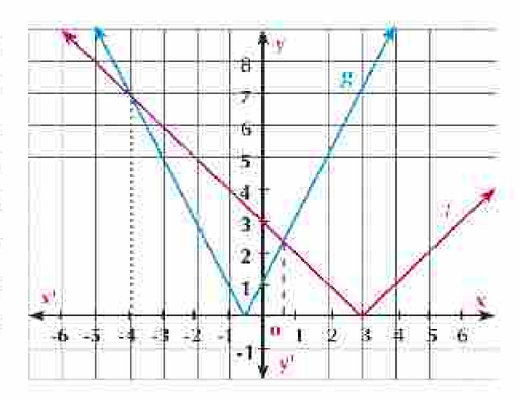
Résolution de l'équation : $|a\ x + b| = |c\ x + d|$



Exemple

(3) Résoudre l'équation $|x - 3| = |2x + 1|$ graphiquement.

Solution



Posons $f(x) = |x - 3|$ et $g(x) = |2x + 1|$

La courbe de la fonction f: $f(x) = |x - 3|$ est le même que la courbe de $|x|$ en la déplaçant trois unités dans la direction de $\overrightarrow{ox}$. Pour la courbe de la fonction g : $g(x) = 2\ |x + \frac{1}{2}|$ est le même que la courbe de $2|x|$ en la déplaçant horizontalement $\frac{1}{2}$ unités dans la direction de $\overrightarrow{ox'}$. Les coordonnées des points d'intersection des courbes des deux fonctions f et g sont: $(-4\ ;\ 7)$ et $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2})$

L'ensemble solution de l'équation est $\{-4\ ;\ \frac{1}{2}\}$

Essayez de résoudre

3) Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes.

a $|x + 7| = |2x + 3|$ **b** $|x - 2| + |x - 1| = 0$

Exemple

4) Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a $|x + 7| = |x - 5|$ **b** $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 9 - 2x$



Remarque

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $|a| = |b|$, alors $a = \pm b$

a $\because |x + 7| = |x - 5|$ $\therefore x + 7 = \pm (x - 5)$



$\therefore x + 7 = x - 5$ **mais** $7 \neq -5$ **(solution refusée).**

ou $x + 7 = -x + 5$ **et donc :** $2x = -2$

$\therefore x = -1$ **Donc** l'ensemble solution est $\{-1\}$

Vérification:

En posant $x = -1$ dans les deux membres de l'équation, on trouve que:

Membre de gauche = Membre de droite = 6 **Donc** l'ensemble solution est $\{-1\}$

Réfléchissez:

Trouver l'ensemble solution de l'équation précédente en utilisant la méthode de l'élévation des carrés des deux membres puis vérifier les valeurs trouvées.

Remarque

pour tout nombre réel a; $\sqrt{a^2} = |a|$

b $\because \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 9 - 2x$

$\therefore \sqrt{(x - 3)^2} = 9 - 2x$ **alors:** $\therefore |x - 3| = 9 - 2x$

i) Si $x > 3$ **donc:** $x - 3 = 9 - 2x$

$\therefore 3x = 12$ **alors:** $x = 4 \in\ ]3\ ;\ +\infty[$

ii) Si $x < 3$ **donc:** $x - 3 = -9 + 2x$

$\therefore x = 6$ **et donc:** $x = 6 \notin\ ]-\infty\ ;\ 3[$ $\therefore$ L'ensemble solution est $\{4\}$

Réfléchissez:

1) Peut-on utiliser la méthode algébrique pour résoudre l'équation précédente? Comment?

(4) Trouvez algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

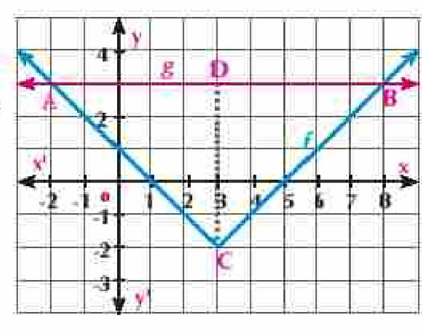
a $|x - 1| - 2|2 - x| = 0$ b $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4$

Applications de la vie courante sur la résolution des équations

Exemple **Planification des villes**

(5) Une parcelle du terrain comprise entre les deux courbes de fonctions f et g, où: $f(x) = |x - 3| - 2$ et $g(x) = 3$, Calculez son aire, en unités carrées. Si la longueur de l'unité est 8 mètres, calculez l'aire du terrain en mètres carrées.

Solution



En représentant les courbes de deux fonctions, on trouve qu'elles se courbent aux points A (-2 ; 3) et B (8 ; 3), La parcelle du terrain a la forme d'un triangle ABC rectangle en C

On a $AB = 8 - (-2) = 10$ unités

$CD = 3 - (-2) = 5$ unités

$\therefore$ Aire $\triangle BAC = \frac{1}{2} AB \times CD$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$ unités carrées

L'aire du terrain $= 25\ (8 \times 8) = 1600$ mètres carrées.


Essayez de résoudre

(5) Trouvez, en unités carrées, l'aire comprise entre les deux courbe des fonctions f et g où:

$f(x) = |x-2| -1$, $g(x) = 5-|x-2|$

Exemple **Réseaux routière**

(6) Deux routes, la première est représentée par la courbe de la fonction f où $f(x) = |x-5|$ et la deuxième est représentée par la courbe de la fonction g où $g(x) = 5 - \frac{2}{3}x$ Si les deux routes se coupent aux deux points A et B, trouver la distance entre A et B à un kilo mètre prés sachant que l'unité de longueur représente une distance de 5 km.

Solution

Les deux routes se coupent si $f(x) = g(x)$, alors $|x-5| = 5 - \frac{2}{3}x = y$

$\therefore\ x - 5 = 5 - \frac{2}{3}x$ c.à.d. $x = 6$ et $y = 1$ Les coordonnées de a = (1 ; 6)

Ou $x - 5 = \frac{2}{3}x - 5$ c.à.d. $x = 0$, $y = 5$ Les coordonnées de b = (0 ; 5)

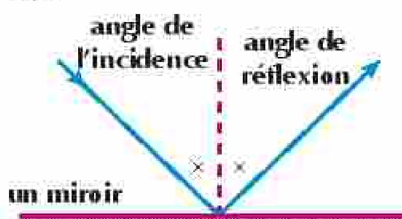
$ab = \sqrt{(6-5)^2+(1-5)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\because$ L'unité de longueur représente 5 kilomètres

$\therefore$ La distance entre a et b $= 5 \times 2\sqrt{13} = 10\sqrt{13} \simeq 36$km

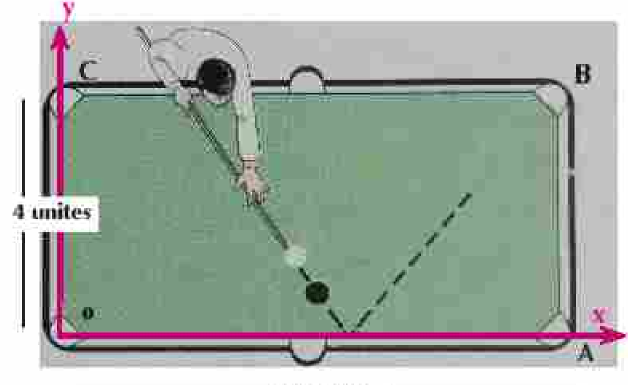


Activité



Si un rayon de la lumière est projeté sur une surface réfléchissante (un miroir), la trajectoire du rayon lumineux est soumise à la fonction valeur absolue de telle sorte que l'angle de l'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Comme la trajectoire d'une balle de billard avant après le choc avec la bande de billard dans certains cas.

1) La figure ci-contre montre que le joueur de billard tire vers la bille noire.
Considérons que $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{oy}$ les deux axes de coordonnées et la trajectoire du bille est définie par la fonction $f(x) = \frac{4}{3}|x-5|$
Est-ce que la bille noire va tomber dans la poche de billard?



Essayez de résoudre

6 Dans l'activité précédente, vérifiez votre solution en déterminant les points d'intersection en solvant les deux équations graphiquement.

[II] Résolution des inéquations

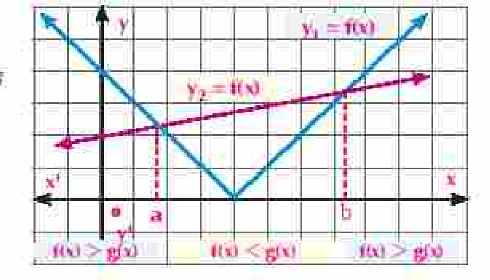
Vous avez déjà étudié les équations. Une inéquation est une proposition mathématique qui contient l'un des symboles: ($<$; $>$; $\leqslant$; $\geqslant$). Résoudre une inéquation consiste à trouver l'ensemble des valeurs de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie.

Résolution des inéquations graphiquement

La figure ci-contre montre les courbes représentatives de deux fonctions f et g où : $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est {a ; b}

C'est-à-dire que: $y_1 = y_2$ si $x = a$ ou $x = b$



On remarque que: $y_1 < y_2$ C.à.d. $f(x) < g(x)$ si $x \in]a\,;b[$

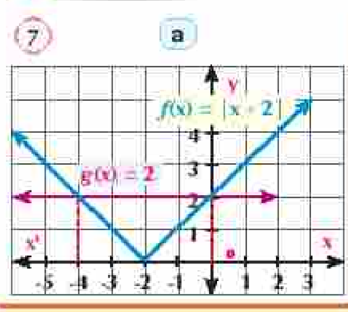
$y_1 > y_2$ C.à.d. $f(x) > g(x)$ si $x \in]-\infty\,;a[\cup]b\,;+\infty[$



Exemple

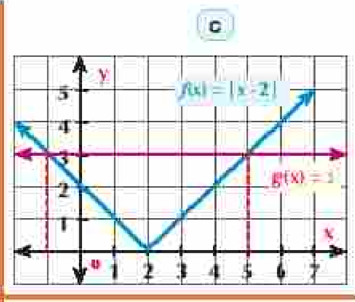
(7)

a



b

c



a	b	c
Ensemble solution de l'inéquation est $\lvert x+2\rvert < 2$ **ou:** $]-4\,;0[$	**Ensemble solution de l'inéquation est** $\lvert 2x+6\rvert > 4$: $]-\infty\,;-5]\cup[-1\,;\infty[$ **ou:** $\mathbb{R} -]-1\,;\,5[$	**Ensemble solution de l'inéquation est** $\lvert x-2\rvert \leqslant 3$ $[-1\,;5]$

Essayez de résoudre

(7) Trouvez l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes en vos aidants par les figures de l'exemple (7):

a $\lvert x+2\rvert \leqslant 2$ **b** $\lvert 2x-6\rvert \leqslant 4$ **c** $\lvert x-2\rvert > 3$

Résolution des inéquations algébriquement

A apprendre

i) Si $\lvert x\rvert \leqslant a$, $a > 0$ **alors:** $-a \leqslant x \leqslant a$

ii) Si $\lvert x\rvert \geqslant a$, $a > 0$ **alors:** $x \geqslant a$ **ou** $x \leqslant -a$



Remarque

Pour tout a , b et c:

Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$.

Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.

Si a et b sont deux nombres positifs et si $a < b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Exemple

(8) Trouver, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

a $\lvert x-3\rvert < 4$ **b** $\sqrt{x^2-2x+1} > 4$

c $\frac{1}{\lvert 2x-3\rvert} > 2$

Solution

a $\because \lvert x-3\rvert < 4$ **c.à.d.** $-4 < x-3 < 4$

En ajoutant 3 aux membres de la double inégalité

$\therefore -4+3 < x-3+3 < 4+3$ **c.à.d:** $-1 < x < 7$

$\therefore$ **L'ensemble solution** $=]-1\,;\,7[$

b $\because \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ **d'où** $|x-1| \geqslant 4$

$\therefore x-1 \geqslant 4$ donc $x \geqslant 5$ ou $x-1 \leqslant -4$ **donc** $x \leqslant -3$

$x \in \mathbb{R} -]-3\ ,\ 5[$ $\therefore$ **L'ensemble solution est** $]-\infty\ ;\ -3] \cup [5\ ;+\infty[$

c $\because \frac{1}{|2x-3|} \geqslant 2$ **En calculant l'inverse des deux membres**

$\therefore |2x-3| \leqslant \frac{1}{2}\ ,\quad x \neq \frac{3}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \leqslant 2x-3 \leqslant \frac{1}{2}$ **En ajoutant 3 aux membres de la double inégalité**

$\therefore -\frac{1}{2}+3 \leqslant 2x-3+3 \leqslant \frac{1}{2}+3$

$\therefore \frac{5}{2} \leqslant 2x \leqslant \frac{7}{2}$ **En divisant par2** $\therefore \frac{5}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7}{4}$

$\therefore$ **L'ensemble solution de l'inéquation est** $[\frac{5}{4}\ ,\ \frac{7}{4}] - \{\frac{3}{2}\}$

Essayez de résoudre

8 Trouvez sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes

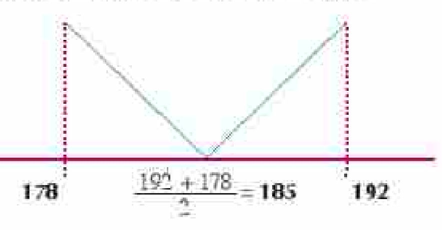
a $|x-7| < 11$ **b** $|3x+7| \leqslant 8$ **c** $\sqrt{x^2-6x+9} > 8$ **d** $\frac{1}{|3x|} > 5$



Exemple **(Applications quotidiennes sur la résolution de l'inéquation)**

9 Une société de gaz naturel nomme les lecteurs des compteurs suivant leurs tailles. On accepte les candidats dont la taille est de 178cm à 192 cm. ou Exprimez les tailles possibles des candidats qui se présentent pour occuper le poste par une inéquation en utilisant la valeur absolue.

Solution



Supposons que la taille du candidat = x cm

$178 \leqslant x \leqslant 192$, en ajoutant -185 aux membres de l'inéquation

$178 - 185 \leqslant x - 185 \leqslant 192 - 185$

$-7 \leqslant x - 185 \leqslant 7$ **c.à.d.** $|x-185| \leqslant 7$

Essayez de résoudre

9 Ecrivez l'inéquation de la valeur absolue qui exprime:

a La note d'un étudiant dans un examen est de 60 à 100 points

b La température mesurée par le thermomètre médical comprise entre 35° et 42°.

c Les algues vertes se trouvent dans les océans à un profondeur qui peut arriver à 30 mètres

Pensé critique: Ecrivez sous la forme d'un intervalle de valeur absolue pour ce qui suit

a $4 \geqslant x \geqslant -4$ **b** $0 < x < 6$

c $x \geqslant -2\ ,\ x \leqslant 2$ **d** $\mathbb{R} - [-2\ ;6]$



Exercices 1 - 5



Trouvez algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

(1) $|x - 2| = 3$ (2) $|3 - 2x| = 7$ (3) $|x + 2| = 3x - 10$

(4) $|x + 2| + x - 2 = 0$ (5) $x + |x| = 2$ (6) $|x - 2| = 3x - 4$

(7) $|x - 1| = x - 2$ (8) $|2x - 6| = |x - 3|$ (9) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2x = 9$

Trouvez graphiquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

(10) $|x - 3| = 7$ (11) $|x + 2| + x - 2 = 0$ (12) $|x - 2| = 3x - 4$

(13) $|2x - 4| = |x + 1|$ (14) $|x| + x = 0$ (15) $|x + 2| = |x - 3|$

Trouvez l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

(16) $|x - 1| < 2$ (17) $|x - 2| < 3$ (18) $|5 - x| > 3$

(19) $|2x - 3| \geqslant 7$ (20) $|x + 3| > -1$ (21) $|2x - 5| \geqslant 2$

Trouvez l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

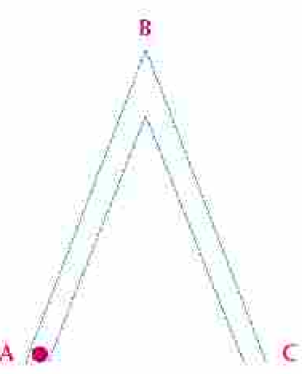
(22) $|x - 3| \leqslant 15$ (23) $|3x - 2| < 4$ (24) $|3x - 7| \geqslant 2$

(25) $|3x + 2| + 5 < 4$ (26) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geqslant 4$ (27) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \leqslant 9$

(28) $|2x - 3| + |6 - 4x| < 12$ (29) $\dfrac{1}{|2x - 5|} \geqslant 3$ (30) $\dfrac{1}{|2x - 3|} > 2$

(31) **En liens avec la mécanique:**

Un corps se meut à une vitesse uniforme d'intensité 8 cm/s. Le corps se déplace de la position A à la position C passant par la position B sans arrêt. Si la distance entre le corps et la position B est donnée par la relation $d(t) = 8\,|5 - t|$ où t est mesuré en secondes et la distance en centimètres.



a Calculez la distance entre le corps et la position B après 2 secondes et 8 secondes. Que remarquez – vous ? Justifier votre réponse

b Quand le corps se trouve-il- à une distance de 16 cm de la position B? Justifier votre réponse.

c Quand le corps se trouve-il- à une distance inférieure à 8 cm de la position B?

Résumé de l'unité

1 Fonction: C'est une relation entre deux ensembles non vides X et Y telle que pour chaque élément de l'ensemble X il existe une seule image dans l'ensemble Y. Cette relation s'écrit sous la forme de $f : X \longrightarrow Y$. Une fonction est déterminée par trois éléments : son ensemble de définition, son ensemble d'arrivée et son expression algébrique.

Une fonction est dite une fonction réelle si son ensemble de définition et son ensemble d'arrivée sont des parties de nombres réels $\mathbb{R}$.

2 Le test de la droite verticale: Dans la représentation graphique d'une relation par un ensemble de points dans un repère orthogonal, si toute droite verticale passant par un élément de son ensemble de définition coupe la représentation en un seul point alors cette relation est une fonction.

3 Fonction définie par morceaux: C'est une fonction réelle, pour des parties de son ensemble définition sont attribuées des règles de définitions différentes.

4 Operations sur les fonctions: Soient f_1 et f_2 deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_1 et D_2 respectivement, alors:

- $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ Où l'ensemble définition de $(f_1 \pm f_2)$ est $D_1 \cap D_2$
- $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ Où l'ensemble définition de $(f_1 \cdot f_2)$ est $D_1 \cap D_2$
- $(\frac{f_1}{f_2})(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est $f_2(x)\ 0 \neq$ l'ensemble définition de $(\frac{f_1}{f_2})$ est $(D_1 \cap D_2) - z(f_2)$
- ou (f_2) est l'ensemble des zéros de f_2

5 Composé des fonctions: Si l'ensemble image de la fonction f est une parti de l'ensemble définition de la fonction f, on peut déduire une nouvelle fonction h composée de deux fonctions notée $h = g \circ f$ qui se lit g rond f(composée de f suivie de g). On a donc $h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$

6 Fonction paire et fonction impaire:

Fonction paire: On dit qu'une fonction est paire si $f : X \longrightarrow Y$ appartenant à l'ensemble de définition $f(-x) = f(x)$ pout tout $x \in X$, $-x \in X$.

Fonction impaire: On dit qu'une fonction est impaire si $f : X \longrightarrow Y$ appartenant à l'ensemble de définition $f(-x) = -f(x)$ pout tout $x \in X$, $-x \in X$.

7 Fonction injective: La fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite injective si pour tout $a \in X$; $b \in X$ et $f(a) = f(b)$; alors autrement dit si $a \neq b$ alors $f(a) \neq f(b)$.

8 Le test de la droite horizontale: La fonction $f : X \longrightarrow Y$ est une injection si la droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) en tous les points représentant l'ensemble image de f coupe la courbe d'une fonction en un point unique.

9 Sens de variation d'une fonction: Une fonction est dite croissante sur]a , b[si pour tout x_1, x_2 appartenant à l'intervalle]a , b[, $x_2 > x_1$ alors $f(x_2) > f(x_1)$.
Une fonction est dite décroissante sur]a , b[si pour tout x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle]a , b[, $x_2 > x_1$ **alors** $f(x_2) < f(x_1)$.
Une fonction est dite constante sur]a , b[si pour tout x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle]a , b[, $x_2 > x_1$ **alors** $f(x_2) = f(x_1)$

10 Fonction linéaire: la forme la plus simple: $f(x) = x$ elle est représentée par une droit passant par le point de coordonnées (0 , 0).

11 Fonction Carré: la forme la plus simple $f(x) = x^2$, elle est représentée graphiquement par une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (0 , 0) et le sommet de sa courbe est le point de coordonnées $x = 0$.

12 Fonction Cube: la forme la plus simple $f(x) = x^3$, le point de coordonnées (0 , 0) est le centre de symétrie de la courbe

13 Fonction valeur absolue:

La forme la plus simple $f(x) = |x|$, qui peutétre définie: $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } & x > 0 \\ -x \text{ si } & x < 0 \end{cases}$

elle est représentée par deux demi-droites de même origine (0 ; 0) la pente de l'une = -1 et la pente de l'autre = -1: $|x| \geqslant 0$, $|-x| = |x|$, $\sqrt{x^2} = |x|$

14 Fonction inverse: La forme la plus simple $f(x) = \frac{1}{x}$,elle est représentée graphiquement par une hyperbole et le centre de symétrie de la courbe est le point de coordonnées (0 ; 0).

15 Transformations géométriques les transformations géométriques de la fonction f et $y = f(x)$, a > 0 sont déterminées comme suit:

- $y = f(x) + a$ où $a > 0$ représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction positive de l'axe des ordonnées d'amplitude a

- $y = f(x) - a$ où $a > 0$: représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction négative de l'axe des ordonnées d'amplitude a

- $y = f(x + a)$ où $a > 0$: représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction négative de l'axe des abscisses d'amplitude a

- $y = f(x - a)$ où $a > 0$: représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction positive de l'axe des abscisses d'amplitude a

- $y = f(-x)$: représentée par une symétrie de la courbe de la fonction f par rapport à l'axe des abscisses.

- $y = a f(x)$ où $a > 1$: représentée par une dilatation verticale de la courbe de la fonction f de coefficient a. C'est un agrandissement si $a > 1$ et une réduction si $a < 1$.

16 Les propriétés de la fonction valeur absolue:

(a) $|a\,b| = |a| \times |b|$

(b) Si $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

(c) Si $|x| \leqslant a$ et $a > 0$ alors: $-a \leqslant x \leqslant a$

(d) Si $|x| \geqslant a$ et $a > 0$ alors: $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$



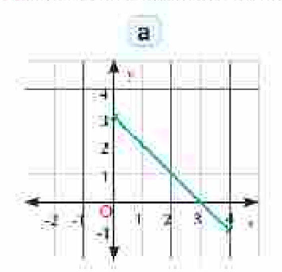
Exercices généraux

1 Dans les représentations graphiques suivantes:

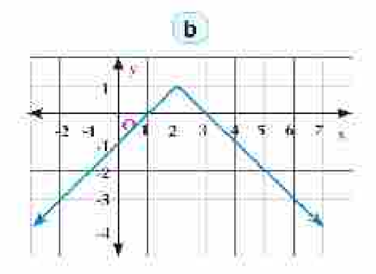
a) Déterminez l'ensemble image b) Déterminez les fonctions injectives.

c) Etudier le sens de variation.

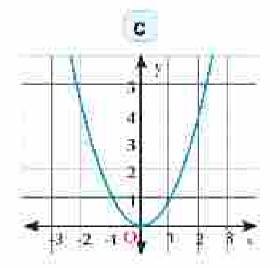
a



b



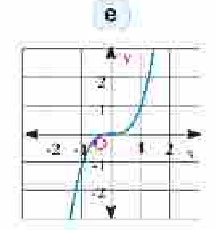
c



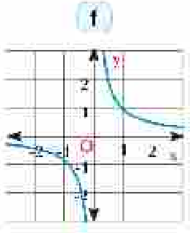
d



e



f



2 Déterminez l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par :

a $f_1(x) = 2x^3 + x + 3$ **b** $f_2(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3}$ **c** $f_3(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d $f_4(x) = \sqrt{x - 3}$ **e** $f_5(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x + 2}}$ **f** $f_6(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

3 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $y = f(x)$ pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes:

a $g_1(x) = 4 + x$ **b** $g_2(x) = x - 1$ **c** $g_3(x) = x + \frac{3}{2}$

Démontrez ensuite que chacune de ces fonctions est injective et étudiez son sens de variation.

4 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = |x|$ pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes:

a $g(x) = |x - 1|$ **b** $g(x) = 2 - |x|$ **c** $g(x) = |x + 2| - 3$

Etudiez le sens de variation de chaque fonction.

5 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes:

a $g_1(x) = x^2 - 3$ **b** $g_2(x) = 2 - x^2$ **c** $g_3(x) = (x - 2)^2 + 1$

Trouvez ensuite l'équation de l'axe de symétrie de la courbe de chaque fonction.

6 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^3$ pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes :

a $f_1(x) = (x + 3)^3$ **b** $f_2(x) = -(x - 1)^3$ **c** $f_3(x) = (x - 1)^3 - 2$

d $f_5(x) = (x + 1)^3 - 2$

7 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$ pour représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes:

a $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$ **b** $f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$ **c** $f_3(x) = \frac{1}{x} + 2$

d $f_4(x) = 1 - \frac{1}{x}$ **e** $f_5(x) = \frac{x+1}{x}$ **f** $f_6(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

8 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations et des inéquations suivantes.

a $|2x - 1| - 3 = 0$ **b** $|3x - 2| + 2x - 3 = 0$ **c** $|x + 2| = |x - 3|$

d $|x + 3| \leqslant 1$ **e** $|3x - 2| \geqslant 6$ **f** $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} > 5$

9 **En Lien avec la géométrie:** trouvez l'aire de la partie comprise entre les courbes des fonctions f et g telles que :

a $f(x) = |x + 3| + 2$, $g(x) = 4$

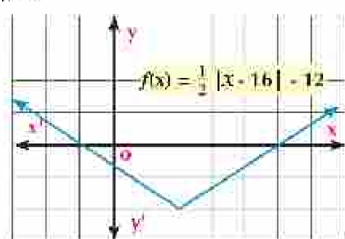
b $f(x) = |x - 3| - 1$, $g(x) = 3 - |x - 3|$

10 Une usine de production du lait, produit de bouteilles de x gm pour vérifier la qualité de poids les bouteilles passent sur une ligne de surveillance de qualité du poids qui permet à passer les bouteilles de sorte qui $|x - 1600| \leq 15$ Déterminez le plus grand et le plus petit poids de bouteille qui l'usine distribue aux marchés.

11 La figure ci-contre montre la courbe de la fonction f définie par:

$f(x) = \frac{1}{2}|x - 16| - 12$

Choisissez des unités convenables pour les deux axes $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{oy}$ Puis trouvez, graphiquement l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 6$



Réflexion créative:

12 Dans un même repère, représenter les deux fonctions f et g telles que $f(x) = x^2|x|$ et $g(x) = 2 - |x|$ Du graphique, trouver l'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

13 Démontrer que la fonction $f(x) = \frac{12}{|x| + 2}$ est paire. Trouver ensuite algébriquement l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 2$



Épreuve cumulative

1 On a effectué des transformations géométriques sur les fonctions f , g et h telles que $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ pour obtenir les représentations graphiques suivantes:

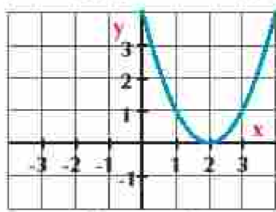


Figure (1)

Figure (2)

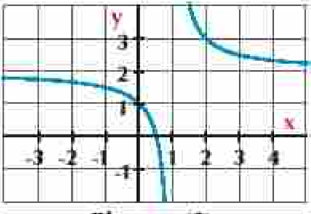


Figure (3)

- **a** L'expression algébrique de la fonction représentée dans la figure (1) est. ....
- **b** L'expression algébrique de la fonction représentée dans la figure (2) est. ....
- **c** L'expression algébrique de la fonction représentée dans la figure (3) est. ....
- **d** La fonction non injective est représentée dans la figure. ....
- **e** L'ensemble image de la fonction représentée dans la figure (1) est. ....
- **f** L'ensemble image de la fonction représentée dans la figure .... est $\mathbb{R}$.
- **g** Le centre de symétrie de la fonction représentée dans la figure (3) est. ....
- **h** L'équation de l'axe de symétrie de la courbe de la fonction représentée dans la figure (1) est ....

2 Trouvez l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes:

a $f_1(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 10}$ **b** $f_2(x) = \sqrt[3]{x+2}$ **c** $f_3(x) = \frac{3}{\sqrt{x-3}}$

3 Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$ et $g(x) = 2x$ trouver la valeur de:

$(f+g)(x)$, $(f \times g)(x)$ et $(\frac{f}{g})(x)$ puis trouvez la valeur de $(f+g)(1)$, $(f \times g)(2)$ et $(\frac{g}{f})(-1)$

4 Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = |x - 3| + 1$. Du graphique, étudiez le sens de variation de la fonction puis trouvez l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 4$

5 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations et des inéquations suivantes:

a $|x + 2| = 3x - 10$ **b** $|x| - 2 - x = 0$ **c** $|3 - 2x| > 5$

6 Démontrez que la fonction f telle que $f(x) = \frac{|x| + 1}{|x|}$ est paire puis la représentez graphiquement. Trouver ensuite graphiquement et algébriquement l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 2x - 2$ et vérifiez la solution.

7 **En lien avec la mécanique :** D'un point du sol, une fusée est lancée verticalement vers le haut à une vitesse de 98 cm/s. Si la relation entre la distance qu'elle parcourt et le temps écoulé est $d = 98\,t - 4.9\,t^2$ où t est le temps en secondes et d est la distance en mètres, démontrez que cette fonction n'est pas injective puis trouvez:

- **a** La hauteur de la fusée deux secondes après son lancement.
- **b** Le temps qu'elle met pour atteindre une hauteur de 470.4 mètres du sol.

Unité 2

Puissances, Logrithmes et Applications

Introduction de l'unité

La notion des logarithmes a été introduite en mathématique à la fin par john Nabbier au début de 17[ème] siécle. Il l'a introduite comme un moyen pour simplifier certains calculs pour aider les marins, les savants et les ingenieurs à partir des outils performants (à l'époque) comme les règle du calcul et les tableaux des logarithmes. Léonhard Euler en 18[ème] siècle a decouvert des propnetées très utiles pour les praticiens. Parmi ces proprietées : détermmé le logarithme de produit de deux nombres $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, cela à partir une relation entre les exposants et les logarithmes. La notion des logaritmes est également util dans d'autres domaines par Exemple le décibl qui est une unité logaritmique pour mesurer de l'intensité du son ainsi que le volte et la puissance hydrogène pour Déterminez le niveau d'acide dans une liquid en chemie.

Compétences attendues de l'unité

- Reconnaître la fonction exponentielle $f: x \longrightarrow a^x$ où $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- Reconnaître la représentation graphique de la fonction exponentielle et déduire ses propriétés
- Reconnaître les formules de puissance rationnelles
- Résoulvez des équations exponentielles
- Résoulvez dexs problèmes conduisant à des équations de la forme $a^x = b$.
- Reconnaître la fonction logarithme $= \log_a x$ or $f(x) = \log_a x$ where $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$
- Transformer algébriquement de la forme exponentielle à la forme logarithmique et inversement.
- Reconnaître la fonction réciproque et la condition de son existence (test de la droite horizontale).
- Reconnaître la représentation graphique de d'une fonction réciproque comme image d'une fonction par symétrie par rapport à la droite $y = x$. On étudie par exemple, la représentation graphique de la fonction logarithme dans des intervalles déterminés comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et on déduit ses propriétés.
- Déduire la relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme graphiquement.
- Reconnaitre les formules de logarithme:
  - $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $x > 0; y > 0$
  - $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$, $x > 0; y > 0$
  - $\log_a (x)^y = y \log_a x$, $x > 0; a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $n \in \mathbb{R}$
  - $\log_a (\frac{1}{x}) = -\log_a x$, $x > 0; a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $x > 0; a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a a = 1$ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - $\log_a 1 = 0$ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
  - Résoulvez des équations logarithmiques.
  - Résoulvez des problèmes en appliquant les formules des logarithmes.
  - Reconnaître les logarithmes usuels à base 10.
  - Trouvez la valeur d'un logarithme en utilisant la calculatrice.
  - Utiliser la calculatrice pour Résoulvez des équations exponentielles en utilisant le logarithme.

Vocabulaires de base

- Exposant
- Puissance
- Base
- Racines
- Exposant fractionnaires
- Racine carrée
- Racine cubique
- Racine nième
- Racine réelle
- Croissance exponentielle
- Décroissance exponentielle
- Pair
- Impair
- Formules exponentielles
- Fonctions exponentielle
- Equations exponentielles
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Symétrie
- Intérêt composé
- Fonction réciproque
- Logarithme
- Forme exponentielle
- Forme logarithmique
- Logarithme usuel
- Logarithme naturel
- Fonctions logarithmiques
- Equations logarithmiques

Leçons de l'unité

Lesson (2 - 1): Puissances fractionnaires

Lesson (2 - 2) Fonction exponentielle etapplications

Lesson (2 - 3) Résolution des equations exponentielle

Lesson (2 - 4) Fonction réciproque

Lesson (2 - 5) Fonction logarithme et sa représentation graphique

Lesson (2 - 6) Quelques propriétés des logarithmes

Aides pédagogiques

Feuilles millimétrés - Une calculatrice scientifique – Ordinateur – Logiciels Graphique

Organigramme de l'unité

Puissances, logarithmes et applications

- **Puissances fractionnaires**
  - Racine nième
  - Généralisation des formules de puissances
- **Fonction exponentielle**
  - Définition de la fonction exponentielle formules de puissances
  - Représentation graphique de la fonction exponentielle formules de puissances
  - Application sur de la fonction exponentielle (croissance – décroissance) formules de puissances
- **Equations exponentielles**
- **Fonction réciproque**
  - Conditions de l'existence d'une fonction réciproque
  - Trouver la fonction réciproque algébriquement et graphiquement
- **Fonction exponentielle**
  - Représentation graphique de la fonction logarithme
  - Application sur la fonction logarithme
- **Propriétés des logarithmes**
  - Quelques propriétés des logarithmes
  - Résoudre les équations logarithmiques

Unité 2

2 - 1 Puissances fractionnaires

Allez apprendre

- Généralisation des formules de puissances.
- Racine nième.
- Formules de puissances frac-tionnaires.

Vocabulaires de base

- Puissances $n^{ième}$
- Base
- Puissance
- Racine nième
- Exposant fractionnai

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Préliminaire

Vous avez déjà étudié les racines carrées d'un nombre réel non négatSi et quelques propriétés des racines carrées et des racines cubiques ainsi que les puissances entières. Dans cette leçon, nous allons étudier les puissances fractionnaires.

A apprendre

Puissances entières

définition 1

1) Pour tout $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ on :
$a^n = a \times a \times a \times ..... \times a$ **(où le facteur a est répété n fois)**
(a^n) est appelé **la puissance $n^{ième}$** du nombre a où le nombre a est **appelé la base**, et le nombre n est la puissance. On dit que a **est élevé** à la puissance n.

2) $a^0 = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

3) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$

Propriétés de puissances entières

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, a , $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ on a:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

Exemple

1 Démontrez que $\frac{9^{4n+1} \times 4^{2-2n}}{3^{9n+1} \times 48^{1-n}} = 1$

Solution

Membre de gauche $= \frac{(3^2)^{4n+1} \times (2^2)^{2-2n}}{3^{9n+1} \times (2^4 \times 3)^{1-n}} = \frac{(3)^{8n+2} \times 2^{4-4n}}{3^{9n+1} \times 2^{4-4n} \times 3^{1-n}}$

$= 3^{8n+2-9n-1-1+n} \times 2^{4-4n-4+4n}$

$= 3^0 \times 2^0 = 1 \times 1$ **(Membre de droite)**

Essayez de Resoulvez

① Mettez l'expression sous la forme la plus simple : $\dfrac{(27)^{-1} \times (12)^{2}}{16 \times (81)^{-2}}$

Exemple

② Démontrez que : $\dfrac{125 \times (15)^{n-2} \times (25)^{m-n}}{(75)^{n} \times (5)^{n+2m}} = \dfrac{5}{9}$

Solution

Membre de gauche $= \dfrac{5^3 \times (3 \times 5)^{n-2} \times (5^2)^{m-n}}{(3 \times 5^2)^n \times (5)^{n+2m}}$

$= \dfrac{(5)^3 \times (3)^{n-2} \times (5)^{n-2} \times (5)^{2m-2n}}{(3)^n \times (5)^{2n} \times (5)^{n+2m}}$

$= (5)^{3+n-2+2m+2n-2n-n-m} \times (3^2)^{n-2-n}$

$= (5)^{1} \times 3^{-2} = \dfrac{5}{3^2} = \dfrac{5}{9}$ **(Membre de droite)**

Essayez de Resoulvez

② Démontrez que: $\dfrac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}} = \dfrac{11}{15}$

Pensé critique:

a Si $a \in \mathbb{R}$,et n est un nombre entier impair, lesquelles des expressions suivantes sont vraies :

(a) $a^n > 0$ (b) $a^n < 0$ (c) $a^n \geq 0$ (d) $a^{n-1} < 0$

b Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, n est un nombre pair, lesquelles parmi les expressions suivantes sont vraies:

(a) $a^n > 0$ (b) $a^n < 0$ (c) $a^{n-1} = 0$ (d) $a^n \leq 0$

Racine n^{ième}

Vous avez déjà étudié que:

L'équation $x^2 = 9$ admet uniquement deux racines réelles qui sont $\sqrt{9} = 3$ and $-\sqrt{9} = -3$

On remarque que $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$

De même, l'équation $x^3 = 8$ admet uniquement une racine réelle qui est $\sqrt[3]{8} = 2$ (les deux autres racines sont des nombres complexes)

On remarque que $(2)^3 = 8$



De manière générale :

L'équation $x^n = a$ où $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ admet n racines. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques cas :

1) Si n est pair et a est positif : $a > 0$

L'équation $x^n = a$ admet deux racines réelles, l'une est positive et l'autre est négative (les autres racines sont des nombres complexes). Les deux racines réelles sont notées $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$,

La racine n^{ième} positive du nombre a est appelée la racine n^{ième} principale du nombre

Par exemple: l'équation $x^4 = 16$ admet deux racines réelles qui sont $\sqrt[4]{16} = 2$, $-\sqrt[4]{16} = -2$

(Les autres racines sont des nombres complexes)

On remarque que $(2)^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$

2) Si n est pair et a est négatif et $a < 0$

L'équation $x^n = a$ a n'admet pas de racines réelles (les racines sont des nombres complexes)

Par exemple: l'équation $x^2 = -9$ n'admet pas de racines réelles (les autres racines sont des nombres complexes)

3) Si n est impair et, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

L'équation $x^n = a$ admet une racine réelle unique qui est $\sqrt[n]{a}$ **les racines sont des nombres complexes)**

Par exemple: l'équation $x^5 = -32$ admet une racine réelle unique qui est $\sqrt[5]{-32} = -2$ **(les autres racines sont des nombres complexes). On remarque que $(-2)^5 = -32$**

4) Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $a = 0$

L'équation $x^n = 0$ admet une racine réelle unique qui est égale à zéro $x = 0$ **(l'équation admet n des racines répétées et nulles si n > 1).**

Essayez de Résoudre:

3) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes

a) $x^4 = 81$ b) $x^5 = 243$ c) $x^4 = -16$ d) $x^3 = -64$

Réflexion critique : Donnez un exemple numérique qui montre la différence entre la racine 6ème du nombre a et $\sqrt[6]{a}$



A apprendre

Puissances fractionnaires

Vous avez déjà étudié que la racine carrée d'un nombre réel non négatif a est le nombre dont le carré est égal à a. Si a^m représente la racine carrée principale du nombre a

$\therefore (a^m)^2 = a$ $\therefore a^{2m} = a$ d'où $2m = 1$ $\therefore m = \frac{1}{2}$

Donc $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée principale du nombre a d'où $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

De même, $a^{\frac{1}{3}}$ est la racine cubique principale du nombre a. d'où $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

De manière générale, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Définition 1

1) Pour tout nombre réelle $a \geqslant 0$; $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ alors $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ racine nème de a. Cette expression est aussi valable si $a < 0$, et n est un nombre paire plus grand que 1

2) $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ où $a \in \mathbb{R}$, et m, n sont des entiers qui n'ont pas de facteurs communs $n > 1$, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$

Généralisations des lois des puissances

Les lois des puissances fractionnaire sont soumises au mêmes lois des puissances entières.



3 **Trouvez, si cela est possible, la valeur de .**

a) $(16)^{\frac{1}{4}}$ b) $-(27)^{\frac{1}{3}}$ c) $(-243)^{\frac{1}{5}}$

d) $(-9)^{\frac{1}{2}}$ e) $16^{\frac{3}{2}}$ f) $(27)^{\frac{4}{3}}$

Solution

a) $(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

b) $-(27)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{27} = -3$

c) $(-243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-243} = -3$

d) $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$ Remarquez que $\sqrt{-9} = 3i$

e) $16^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$

f) $(27)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{4}{3}}} = (\frac{1}{\sqrt[3]{27}})^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

Essayez de Résoudre:

4 **Trouvez, si cela est possible, la valeur de :**

a) $(125)^{\frac{1}{3}}$ b) $(-81)^{\frac{1}{4}}$ c) $(128)^{-\frac{2}{7}}$ d) $-(343)^{\frac{2}{3}}$

Expliquez pourquoi?

Le nombre $(-8)^{\frac{1}{3}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{R}$, tandis que le nombre $(\sqrt[6]{-8})^2$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

Propriétés des racines n[ièmes]

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$ où $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$



$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n est pair

$\sqrt[n]{a^n} = a$ si n est impair



4 Mettez sous la forme la plus simple :

a) $-\sqrt[3]{8a^6 b^9}$ b) $\sqrt[4]{16x^4 y^8}$

Solution

a) $-\sqrt[3]{8a^6b^9} = -\sqrt[3]{8} * \sqrt[3]{a^6} * \sqrt[3]{b^9} = -2a^2b^3$

b) $\sqrt[4]{16x^4y^8} = \sqrt[4]{16} * \sqrt[4]{x^4} * \sqrt[4]{y^8} = 2|x|y^2$

Essayez de Résoudre:

5 Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\sqrt[4]{16\, a^{12}}$ **b** $\sqrt[6]{(x+2y)^{18}}$

Remarque



Les formules des puissances entières sont aussi valables pour les puissances fractionnaires.

Exemple

5 Trouvez sous la forme la plus simple :

a $(18)^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{(24)^{\frac{1}{2}}}$ **b** $\frac{3^{\frac{1}{2}} \times (147)^{\frac{1}{6}}}{(63)^{\frac{1}{3}}}$

Solution

a L'expression $= (2 \times 3^2)^{-\frac{1}{2}} \times (3 \times 2^2)^{\frac{3}{2}} \times (3 \times 2^3)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{2}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2 \times 3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}$

$= 2^{\frac{-1+6-3}{2}} \times 3^{\frac{-2+3-1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$

b L'expression $= \frac{3^{\frac{1}{2}} \times (3 \times 7^2)^{\frac{1}{6}}}{(3^2 \times 7)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}}$

$3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0 \times 7^0 = 1 \times 1 = 1$

Essayez de Résoudre:

6 Démontrez que:

a $\frac{(343)^{2x-\frac{1}{3}} \times (4)^{3x+1}}{(196)^{3x} \times 4} = \frac{1}{7}$ **b** $\frac{125 \times \sqrt[8]{4^7} \times 10^{-\frac{1}{4}}}{4^{-\frac{5}{8}} \times \sqrt[4]{6^{-3}} \times 15^{\frac{3}{4}}} = 25$

Solution des équations exponentielles dans $\mathbb{R}$

Exemple

6 Trouvez l'ensemble solution, dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes

a $x^{\frac{7}{2}} = 128$ **b** $(2x+3)^{\frac{4}{3}} = 81$

c $x^{\frac{4}{3}} - 10\, x^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$ **d** $\sqrt[3]{x^5} - 31\, \sqrt[6]{x^5} = 32$

Remarque

Si $x^{\frac{m}{n}} = a$

alors $x = a^{\frac{n}{m}}$

où m et un nomre impair

Si $x^{\frac{m}{n}} = a$

a lors $x = \pm\, a^{\frac{n}{m}}$

est un nombre pair et m, n n'ont pas de facteurs communs

Solution

a $x^{\frac{7}{2}} = 128$

$x = (128)^{\frac{2}{7}}$ $x = (2^7)^{\frac{2}{7}}$

$x = 2^2 = 4$ $\therefore$ E.S = { 4}

b $(2x+3)^{\frac{4}{3}} = 81$

$((2x+3)^{\frac{4}{3}})^3 = (3^4)^3$ en élvant les deux memebres à la puissance 3

$(2x+3)^4 = 3^{12}$

$2x+3 = \pm\, (3^{12})^{\frac{1}{4}}$ $2x+3 = \pm\, 3^3$

soit $2x + 3 = 27$ $\quad 2x = 24$ $\quad \therefore\ x = 12$

ou $2x + 3 = -27$ $\quad 2x = -30$ $\quad \therefore\ x = -15$

S.S = {12; -15}

c $x^{\frac{4}{3}} - 13x^{\frac{2}{3}} + 36 = 0$

$(x^{\frac{2}{3}} - 9)(x^{\frac{2}{3}} - 4) = 0$

soit $x^{\frac{2}{3}} - 9 = 0$ **ou** $x^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$

$x^{\frac{2}{3}} = 3^2$ $\qquad x^{\frac{2}{3}} = 2^2$

$x = \pm(3^2)^{\frac{3}{2}}$ $\qquad x = \pm(2^2)^{\frac{3}{2}}$

$x = \pm 27$ $\qquad x = \pm 8$

E.S = {27; -27; 8 , -8}

d $\sqrt[3]{x^5} - 31\sqrt[6]{x^5} - 32 = 0$

$x^{\frac{5}{3}} - 31x^{\frac{5}{6}} - 32 = 0$

$(x^{\frac{5}{6}} - 32)(x^{\frac{5}{6}} + 1) = 0$

soit $x^{\frac{5}{6}} - 32 = 0$ | **ou** $x^{\frac{5}{6}} + 1 = 0$

$x^{\frac{5}{6}} = 2^5$ | $x^{\frac{5}{6}} = -1$ **réfusée**

$x = (2^5)^{\frac{6}{5}}$

$x = 64$

E.S = {64}

Essayez de Résoudre:

7) Trouvez l'ensemble solution, dans ℝ de chacune des équations suivantes:

a $x^{\frac{4}{3}} = 81$ **b** $(x+1)^{\frac{-3}{2}} = 32^{\frac{-1}{2}}$ **c** $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 4$

 **Exercices 2 - 1** 

1) Simplifiez $\frac{\sqrt{8} \times 4^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{6^{-2} \times 3^{2}}$

2) Dans quelles conditions la relation $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ est-elle vraie pour toutes les valeurs réelles de a et b ?

3) Complétez ce qui suit :

a $(8)^{\frac{2}{3}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

b $(6\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

c $(\frac{16}{625})^{-\frac{3}{4}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

d $\sqrt[3]{(3\frac{3}{8})^{-1}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

e $(5^2 - 3^2)^{\frac{1}{2}}$ dans la forme la plus simple est égal à ....

4) Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

a Si $5^x = 2$ alors 25^x est égal à = ... (10 , 625 , 4 , 2)

b $(2^7 + 2^5)^{-\frac{1}{2}}$ = ... (2 , -2 , $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$)

c Si $x^{\frac{3}{2}} = 64$ alors x = ... (512 , 16 , 4 , 2)

d Laquelle des valeurs ci- contre n'est pas équivalente à $(\sqrt[3]{x^4})$ $((\sqrt[3]{x})^4 , \sqrt[4]{x^3} , x^{\frac{4}{3}} , (x^{\frac{1}{3}})^4)$

(e) Si $4x^3 = 128$ alors x est égal à = ... $(4\ ,\ \pm 2\ ,\ 2\ ,\ -2)$

(f) L'ensemble des racines réelles de l'équation $(x-2)^4 = 16$ .... $(\{0\}\ ,\ \{4\}\ ,\ \{8\}\ ,\ \{0, 4\})$

(g) Si $3^a = 4^b$ alors $9^{\frac{a}{b}} + 16^{\frac{b}{a}}$ est égal à = ... $(7\ ,\ 12\ ,\ 20\ ,\ 25)$

5) Déceler l'erreur :

(a) $-9 = (-9)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

(b) Si $x^4 = 81$ alors $x = \sqrt[4]{81}$

$\therefore\ x = 3$

6) Lien avec la géométrie : Si le rayon d'une sphère est donné en fonction de son volume par la relation $r = (\frac{3V}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$. Trouvez la valeur de l'augmentation de son rayon lorsque son volume varie de $\frac{32}{3}\pi$ à $36\,\pi$ unités de volume.

7) Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

(a) $x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}$

(b) $x^4 = 81$

(c) $\sqrt[3]{(x-1)^5} = 32$

(d) $(x^2 - 5x + 9)^{\frac{5}{2}} = 243$

(e) $x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

(f) $x + 15 = 8\sqrt{x}$

(g) $\sqrt[3]{x^2} - 25\sqrt[3]{x} - 54 = 0$

(h) $(2x-1)^4 = (x+3)^4$

8) Soit $x^{\frac{3}{2}} = 3y^{\frac{2}{3}} = 27$. Trouvez la valeur de $x + y$

9) Pensé critique. Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

(a) Si $x < 0$ alors: $\sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 =$ .... $(x\ ,\ -x\ ,\ 0\ ;\ -1)$

(b) Si $a = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{7}}}$ lequel des nombres ci-contre est rationnel .... $(a^{12}\ ,\ a^{16}\ ,\ a^{18}\ ,\ a^{24})$



Activité



Utilisez une calculatrice pour effectuer les opérations suivantes (Arrondir le résultat à un centième près) :

(a) $\sqrt[3]{\frac{7^4 \times 3^{-3}}{2^{-7}}}$

(b) $(23)^{-\frac{3}{2}} + (0.01)^{-\frac{5}{3}}$

Fonction exponentielle et applications

2 - 2



Activité

Les bactéries se développent en se divisant chacune en deux cellules directement dans une période déterminée puis les deux cellules se divisent en quatre et les quatre en huit et ainsi de suite dans des périodes équivalentes et dans les mêmes conditions.

Le tableau suivant montre le temps de division d'une cellule de bactérie en heures et le nombre de cellules produites :

Temps en heures	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de cellules	1	2	4	.....	.....	.....	64

1) Complétez Le tableau précédent.
2) Exprimez le nombre de cellules sous forme exponentielle de base 2.
3) Peut-on estimer le nombre de cellules après 8 heures ?
4) Exprimez, sous forme exponentielle, le nombre de cellules après x heures.



A apprendre

Fonction exponentielle

Définition 1

La fonction f telle que $f(x) = a^x$ où $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ **est appelée fonction exponentielle.**

Exemple:

$f(x) = 2^x$ est une fonction exponentielle de base (2) et d'exposant (x)

$f(x) = 5^{x+1}$ est une fonction exponentielle de base (5) et d'exposant (x+1)

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ est une fonction exponentielle de base $\left(\frac{1}{3}\right)$ et d'exposant ($2x$)

Essayez de Résoudre:

1) Parmi les fonctions suivantes, identifiez les fonctions exponentielles.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = (2)^x$

c) $f(x) = \frac{3}{x+1}$

d) $f(x) = x^3 - 1$

e) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$

f) $f(x) = (-2)^x$

Allez apprendre
- Fonction exponentielle.
- Représentation graphique d'une fonction exponentielle.
- Propriétés d'une fonction exponentielle



Vocabulaires de base
- Fonction exponentielle
- Croissance exponentielle
- Décroissance exponentielle

Aides pédagogiques
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de
- Graphisme



Rappel

Fonction algébrique:
La variable indépendante x est la base et la puissance est un nombre réel.

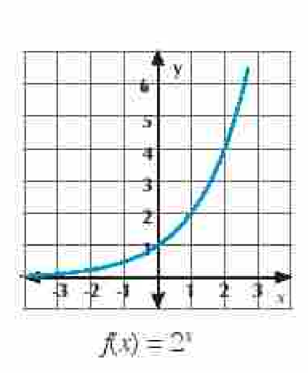
Fonction exponentielle:
La variable indépendante x est la puissance

et la base est un nombre réel positif déférent de 1.

Représentation graphique d'une fonction exponentielle

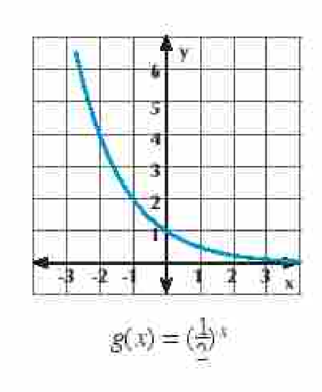
Représentez graphiquement les deux fonctions : $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

sur un intervalle arbitraire $x \in [-3, 3]$



$f(x) = 2^x$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
-3	$\frac{1}{8}$	8
-2	$\frac{1}{4}$	4
-1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$



$g(x) = (\frac{1}{2})^x$

Propriétés des fonctions exponentielles $f(x) = a^x$ où $a > 0$, $a \neq 1$

1) l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = (a)^x$ est $\mathbb{R}$ et son ensemble image est $]0 ; +\infty[$

2) Si $a > 1$, alors la fonction est croissante sur son ensemble de définition elle est applée croissance exponentielle . Si $0 < a < 1$, la fonction est décroissante sur son ensemble de définition elle est applée décroissance exponentielle.

3) La courbe de la fonction $f(x) = a^x$ passe par le point $(0; 1)$ pour tout $a > 0$; $a \neq 1$

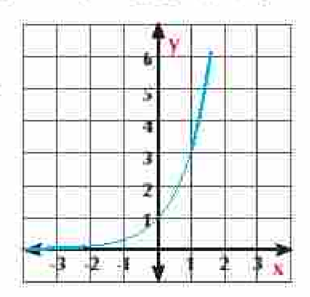
4) $f(x) = a^x$ est une fonction injective

5) La courbe de la fonction $f(x) = a^x$ est l'image de la fonction $f(x) = (\frac{1}{a})^x$ par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

6) $a^x \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$ et $a > 1$; $a^x \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$ et $0 < a < 1$

Essayez de Résoudre:

2 La figure ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (3)^x$. Sur le même graphique, tracez la courbe représentative de la fonction $g(x) = (\frac{1}{3})^x$. Déterminez ensuite, l'ensemble de définition et l'ensemble image de chacune des deux fonctions. Laquelle des deux fonctions est croissante et laquelle des deux fonctions est décroissante ? Justifiez la réponse.



3 **Pensé critique:** Si $f(x) = a^x$ où $0 < a < 1$ rangez ce qui suit dans un ordre croissant $f(7)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{5})$, $f(0)$

Exemple

1 Si $f(x) = 3^x$, **complétez ce qui suit:**

a $f(2) =$ ______ b $f(x+2) =$ ______ $\times f(x)$ c $f(x) \times f(-x) =$ ______

Solution

a $f(2) = 3^2 = 9$ b $f(x+2) = 3^{x+2} = 3^x \times 3^2 = 9\,f(x)$

c $f(x) \times f(-x) = 3^x \times 3^{-x} = 3^{x-x} = 3^0 = 1$

Essayez de Résoudre:

4 Dans les exercices suivants, écrivez la règle de la fonction convenable en dessous de figure .

a $y = 3^x$ b $y = 3^{-x}$ c $y = -3^x$

d $y = -3^{-x}$ e $y = 3^x - 1$ f $y = 3^{x-1}$

g $y = 3^{1-x}$ h $y = 1 - 3^x$

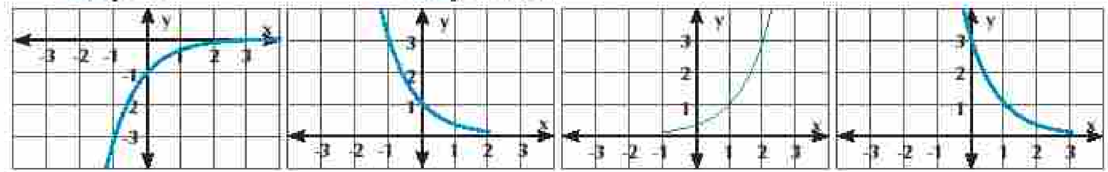


figure (1) figure (2) figure (3) figure (4)

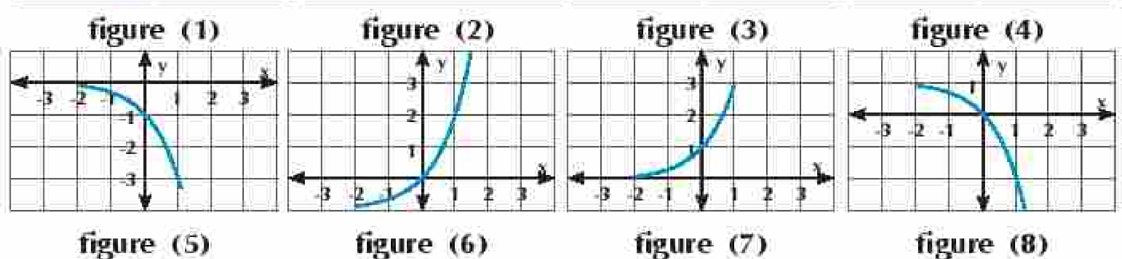


figure (5) figure (6) figure (7) figure (8)

Applications impliquent aux équations à la forme $a^x = b$

Croissance et décroissance exponentielle :

Dans la vie courante, il y a des multiples phénomènes qui peuvent être modélisés comme des fonctions décrivant la croissance ou la décroissance au cours du temps. Par exemple, l'étude de la population, des bactéries, des virus, de la radiation, de l'électricité et de la météorologie. Dans le domaine de l'algèbre, il y a deux fonctions peuvent facilement utiliser pour exprimer les notions de la croissance et celle de décroissance qui sont les fonctions de la croissance et celle de décroissance exponentielle.

Croissance exponentielle

Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(t) = a\,(1 + p)^t$ pour représenter la croissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe durant des périodes équivalentes où t est le temps écoulé pendant une période, a est la valeur initiale et p est le pourcentage de croissance dans cette période du temps. Discuter avec votre professeur pour déduire la relation précédente.

Exemple

2 **Intérêt composé:** Pour calculer le total T d'un montant investit m dans un banque pour un intérêt annuel c (un pourcentage) pour un nombre n d'années, les intérêts peuvent être

composés sur x fractions (des intervalles) d'une année, on utilise la relation suivante
$T = m(1+\frac{c}{x})^{nx}$

Exemple: Un homme a déposé un montant de 5000 livres égyptiennes dans une banque pour un intérêt composé annuel de 8%.Trouvez la somme totale après 10 ans dans chacun des cas suivants :

a Intérêts annuels   b Intérêts trimestriels   c Intérêts mensuels.

Solution

En utilisant la relation suivante $T = m(1+\frac{c}{x})^{nx}$ où x sont les fractions annuelles

(a) Intérêts annuels $\therefore x = 1$

$T = 5000\,(1+0.08)^{10} = 10794.62$ L.E

(b) Intérêts trimestriels $\therefore x = 4$

$T = 5000\,(1+\frac{0.08}{4})^{10\times 4} = 11040.2$ L.E

(c) Intérêts mensuels $\therefore x = 12$

$T = 5000\,(1+\frac{0.08}{12})^{10\times 12} = 11098.2$ L.E

Essayez de Résoudre:

5 Dans une ruche, les abeilles se développent à un taux de croissance de 25% par semaine. Si le nombre initial d'abeilles est 60; écrire la fonction de croissance exponentielle représentant le nombre d'abeilles après t semaines puis estimer ce nombre après 6 semaines.

Décroissance exponentielle

Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(t) = a\,(1 - p)^t$ pour représenter la décroissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe durant des périodes équivalentes où n est le temps écoulé pendant une période, a est la valeur initiale et p est le pourcentage de croissance dans cette période du temps.

Exemple

3 **En lien avec le commerce :** Karim a acheté une nouvelle voiture à 120000 Livres Égyptiennes. Si le prix de la voiture dimine à un taux annuel de 12% .

1- écrire un fonction exponentielle représentant le prix de la voiture n ans après l'année d'achat.

2- estimer à une Livre près, le prix de la voiture 6 ans après l'année d'achat.

Solution

$a = 120000$, $p = \frac{12}{100} = 0.12$, La durée $n = 6$ ans

1: La fonction de décroissance exponentielle est f telle que : $f(t) = a(1 - p)^t$

En substituant les valeurs de a et p :

$f(t) = 120000\,(1 - 0.12)^t$ d'où: $f(t) = 120000\,(0.88)^t$

2: En remplaçant t = 6 dans la fonction de décroissance exponentielle:

$f(5) = 120000(0.88)^6 = 55728.49041$ Le prix estimé de la voiture après 55728 L.E

Essayez de Résoudre:

6 **En lien avec la médecine:** Un malade prend 40 milligrammes d'un médicament. Le corps du malade, se débarrasse d'environ 10% de la quantité de ce médicament dans le corps chaque heure.

a Ecrivez une équation exponentielle exprimant la quantité du médicament restante dans le corps t heures après l'avoir pris.

b Estimez la quantité du médicament restante dans le corps 4 heures après l'avoir pris.



1 **Complétez :**

a La fonction f telle que $f(x) = a^x$ est exponentielle si a .... , x ....

b La fonction exponentielle g telle que $g(x) = 3^{x-1}$ a pour base ....

c La fonction p telle que $p(x) = (\frac{-1}{2})^{x+1}$ n'est pas une fonction exponentielle car ....

d Les coordonnées du point d'intersection de la courbe de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ avec la droite $x = 0$ est le point (...... ; ......)

e L'équation de l'axe de symétrie de la courbe constituée des deux courbes représentatives des deux fonctions f et g telles que, $f(x) = 3^x$, $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ est ....

2 **Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :**

a Une fonction exponentielle de base a est croissante si :

(a) $a > 0$ (b) $a > 1$ (c) $0 < a < 1$ (d) $a = 1$

b Une fonction exponentielle de base a est décroissante si :

(a) $a > 0$ (b) $a < 0$ (c) $0 < a < 1$ (d) $-1 < a < 0$

c La courbe représentative de la fonction exponentielle f telle que $f(x) = a^x$, $a > 1$ s'approche de :

(a) l'axe des abscisses (sens positif) (b) l'axe des abscisses (sens négatif)

(c) l'axe des ordonnées (sens positif) (d) l'axe des ordonnées (sens négatif)

d Dans la fonction exponentielle f telle que $f(x) = a^x$ (où $a > 1$) $f(x) > 1$ si :

(a) $x \in \mathbb{R}$ (b) $x \in \mathbb{R}^+$ (c) $x \in \mathbb{R}$ (d) $x \in Y$

e Dans la fonction exponentielle g telle que $g(x) = a^x$, $(0 < a < 1)$ alors $0 < a^x < 1$ si $x \in$

(a) $]0 ; +\infty[$ (b) $]-\infty ; 0]$ (c) $]1 ; +\infty[$ (d) $]-\infty ; 1]$

3 Parmi les fonctions suivantes, identifiez les fonctions exponentielles en déterminant la base et la puissance de chaque fonction :

a $f(x) = 2x^3$ **b** $f(x) = \frac{2}{3}(5)^x$ **c** $f(x) = \frac{1}{x-1}$

d $f(x) = 3x^2 - 1$ **e** $f(x) = (\frac{2}{3})^{x-1}$ **f** $f(x) = (-7)^x$

4 Dans chacun des cas suivants, représentez la fonction f graphiquement puis déterminez son ensemble de définition son ensemble image et étudier son sens de variation:

a $f(x) = 3^x$ **b** $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ **c** $f(x) = -3\,(2)^x$ **d** $f(x) = 2^{x+1} + 1$

e $f(x) = (\frac{1}{2})^{x+2} - 2$ **f** $f(x) = 2\,(\frac{2}{3})^{x-1} + 1$ **g** $f(x) = -(\frac{1}{2})^{2x} + \frac{3}{4}$

5 **En lien avec l'épargne :** Ziad a déposé une somme de 80000 Livres dans une banque à un taux d'intérêt de 10,5%. Quel sera le montant total après dix ans, sachant que la totalité du montant est donnée par la relation $m = s(1 + p)^n$ où s est la somme déposée, p le taux d'intérêt et n le nombre d'année.

6 **En lien avec la communication :** Dans une ville, le nombre de téléphones fixes diminue avec la diffusion des téléphones portables à un taux de diminution de 10%. Si, en une année donnée, le nombre de téléphones était de 54000 appareils, écris une fonction exponentielle représentant un nombre de téléphones après n année, puis estime le nombre de téléphones après 4 années.

7 **Lien avec l'investissement :** Dans une ferme, le nombre de vaches est 80 vaches. Si le taux de reproduction de ses vaches atteint annuellement 18% environ, trouver le nombre de vaches dans la ferme au bout de 4 années.

8 **Lien avec la population :** En République Arabe d'Egypte, le recensement de la population dans un gouvernorat donné a atteint 4,6 millions d'habitants avec une augmentation moyenne de 4% annuellement.

a) Ecrivez une fonction exponentielle représentant le développement futur après n années.

b) Estimez le nombre d'habitants dans ce gouvernorat 5 années après le recensement.

9 **Lien avec le sport :** Le nombre de supporters d'une équipe de football régresse à un taux de 4% à cause de sa défaite dans un tournoi sportif. Si dans le premier match, le nombre de supporters était de 36400, écrivez une fonction exponentielle représentant le nombre de supporters (y) dans le match d'ordre (m) puis estimer le nombre de supporters dans le dixième match.

10 **Réflexion créative:** Si $f(x) = 2^x$ démontrez que $\frac{1}{f(x)+1} + \frac{1}{f(-x)+1}$ a une valeur constante quelque soit la valeur de x.

Résolution des equations exponentielle

2 - 3



D'après le tableau suivant, quand les deux expressions sont-elles égales ? 2^x et $2x$:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x$	-4	-2	0				
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1				



A apprendre

Equation exponentielle

Si une équation contient la variable en position d'exposant, alors c'est une équation exponentielle comme par exemple, l'équation ($3^x = 27$) alors:

1: Si $a^m = a^n$, $a \notin \{0; 1; -1\}$ **alors** $m = n$.

Exemple

1) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes

a) $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ b) $(2\sqrt{2})^{x-3} = 8^{x-2}$

Solution

a) $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ $\therefore 3^{x+1} = 3^{-3}$

$\therefore x + 1 = -3$, $x = -4$ $\therefore$ E.S = {-4}

b) $(2\sqrt{2})^{x-3} = 8^{x-2}$ $\therefore (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{x-3} = (2^3)^{x-2}$

$\therefore (2^{\frac{3}{2}})^{x-3} = (2^3)^{x-2}$ $\therefore 2^{\frac{3}{2}(x-3)} = 2^{3(x-2)}$

$\therefore \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 3x - 6$ **multipliant par 2**

$\therefore 3x - 9 = 6x - 12$ $\therefore 3x - 6x = 9 - 12$

$-3x = -3$ $x = 1$ $\therefore$ E.S = {1}

Essayez de Résoudre:

1) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $2^{3-x} = \frac{1}{16}$ b) $\frac{(3^2+5^2)^x}{68^x} = \frac{1}{32}$

2 : Si $a^m = b^m$, $a, b \notin \{0; 1; -1\}$, alors

ou: $m = 0$

ou: $a = b$ Si m est impair , $a = \pm b$ Si m est pair.

Allez apprendre apprendre

- Résolution de l'équation expo- nentielle algébri- quement.
- Résolution de l'équation expo- nentielle graphi- quement

Vocabulaires de base



- Equation exponentielle
- Résolution graphique

Aides pédagogiques

- Ordinateur et logiciels de graphisme
- Calculatrice scientifique

Exemple

(2) Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a) $2^{x-3} = 5^{x-3}$ b) $7^{x+1} = 3^{2x+2}$

Solution

a) $2^{x-3} = 5^{x-3}$ $\therefore\ x - 3 = 0$ $x = 3$

$\therefore$ L'ensemble solution est $\{3\}$

b) $7^{x+1} = 3^{2x+2}$ $\therefore\ 7^{x+1} = 3^{2(x+1)}$ $\therefore\ 7^{x+1} = 9^{x+1}$

$\therefore\ x + 1 = 0$ $x = -1$ $\therefore$ L'ensemble solution est $\{-1\}$

Essayez de Résoudre :

(2) Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a) $3^{x-5} = 2^{x-5}$ b) $4^{x+2} = 3^{2x+4}$

Réflexion critique : Trouvez toutes les solutions de l'équation $x^{x-2} = 4^{x-2}$

Exemple

(3) Si $f(x) = 3^x$

a) Démontrez que $f(x + 2) \times f(x - 2) = f(2x)$

b) Soit $f(x + 1) - f(x - 1) = 72$ Trouvez la valeur de x

Solution

a) Membre de gauche $= f(x + 2) \times f(x - 2) = 3^{x+2} \times 3^{x-2}$

$= 3^{x+2+x-2}$ $= 3^{2x}$ $= f(2x) =$ Membre de droite

b) $\because f(x + 1) - f(x - 1) = 72$ $\therefore\ 3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

$\therefore\ 3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

$\therefore\ 3^{x-1}(3^2 - 1) = 72$

$\therefore\ 3^{x-1} = 9 = 3^2$ $\therefore\ x - 1 = 2$ $\therefore\ x = 3$

Essayez de Résoudre:

(3) Si $f_1(x) = 8^x$, $f_2(x) = 4^x$

a) Démontrez que $\dfrac{f_1(2x + 1) + f_2(3x + 2)}{f_1(2x - 1) + f_2(3x - 2)} = 128$

b) Résoulvez l'équation $f_1(2x) + f_2(3x - 1) = 80$


Exemple



(4) Si $f(x) = 2^x$
Trouvez la valeur de x qui vérifie l'équation : $f(x) + f(5 - x) = 12$:

Solution

Substituons dans l'équation $f(x) + f(5 - x) = 12$

$2^x + 2^{5-x} = 12$

$2^x \times 2^x + 2^{5-x} \times 2^x = 12 \times 2^x$ multippliant les deux membres par 2^x

$2^{x+x} + 2^{5-x+x} - 12 \times 2^x = 0$

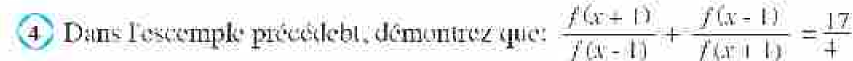
$2^{2x} - 12 \times 2^x + 32 = 0$ par factorisation

$(2^x - 4)(2^x - 8) = 0$

Soit : $2^x = 2^2$ alors $x = 2$

Ou: $2^x = 2^3$ alors $x = 3$

Essayez de Résoudre:



(4) Dans l'escemple précédebt, démontrez que: $\frac{f(x+1)}{f(x-1)} + \frac{f(x-1)}{f(x+1)} = \frac{17}{4}$

Résolution des équations exponentielles graphiquement

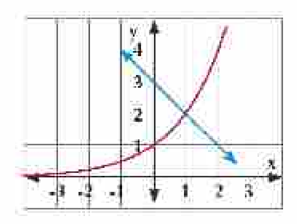

Activité

(5) En utilisant un logiciel de graphisme, tracez dans un même graphique, les deux fonctions $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3 - x$. Du graphique, Trouvez l'ensemble solution de l'équation $2^x = 3 - x$

Solution

En utilisant *Geogebra* , on trace les courbes des deux fonctions. Du graphique, les coordonnées du point d'intersection des deux courbes est (1 ; 2) .

∴ L'ensemble solution est = {1} ⟶ C'est l'abscisse du point d'intersection



Essayez de Résoudre:

(5) En utilisant un logiciel de graphisme, tracez dans un même graphique, les deux fonctions :

$f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = x + 2$. Du graphique, trouvez l'ensemble solution de l'équation $2^x = x + 2$

 **Exercices 2 - 3** 

1 Choisissez la bonne réponse:

a Si $2^{x+1} = 8$, alors $x =$ ....

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 3

b Si $5^{x-1} = 4^{x-1}$; alors $x =$ ....

(a) 5 (b) 1 (c) -1 (d) 0

c $(\frac{1}{2})^{a^2-a-2} = 1$ où a > 0; alors a = ...

(a) 1 (b) -3 (c) 2 (d) 3

2 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $2^{x+1} = 4$ **b** $3^{x-1} = \frac{1}{9}$ **c** $7^{x-2} = 1$

d $5^{x+3} = 4^{x+3}$ **e** $(3\sqrt{3})^{|x|} = 27$ **f** $3^{x+3} - 3^{x+2} = 162$

g $5^{2x} + 25 = 26 \times 5^x$ **h** $2^x + 2^{5-x} = 12$ **i** $(\frac{1}{2})^{x+1} + (\frac{1}{2})^{x+3} + (\frac{1}{2})^{x+5} = 84$

3 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

$3^x \times 5^y = 75$, $3^y \times 5^x = 45$

4 Si $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 9^x$ Trouvez la valeur de x qui vérifie $f_1(2x - 1) + f_2(x + 1) = 756$

5 Si $f(x) = 7^{x+1}$Trouvez la valeur de x qui vérifie $f(2x - 1) + f(x - 2) = 50$

6 Trouvez graphiquement , en utilisant un logiciel de graphisme l'ensemble solution des équations :

a $3^{x-2} = 3 - x$ **b** $2^x = 2x$

7 **Réflexion créative :** Si $x^3 = y^2$ et $x^{n+1} = y^{n-1}$, trouvez la valeur de n .

8 **En lien avec les nombres:** Si la somme des nombres $2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n$ donnée par la relation $s_n = 2(2^n - 1)$

a Trouvez la somme des dix premiers nombres

b Trouvez le nombre de termes qu'il faut ajouter à partir du premier terme pour obtenir une somme de 131070

9 Résolvez chacune des équations suivantes

a $3^{x^2-42} = (\frac{1}{3})^x$ **b** $7^{2-x} + 7^{-x} = 50$

10 **Réflexion créative**

Trouvez l'ensemble solution de l'équation :

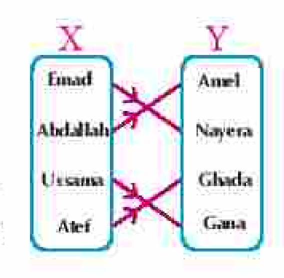
$9^{x+1} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0$

Fonction réciproque

2 - 4



Réfléchissez et discutez



La figure ci-contre représente une relation de l'ensemble des pères X = { Emad , Abdallah , Ossama , Atef } et l'ensemble de leurs filles Y = { Amal , Nayerah , Ghada , Ganah }. A l'aide de la figure :

1) Ecrivez le graphe de la relation « est le père de » qui relie X à Y. Cette relation est-elle une fonction ?

2) Ecrivez le graphe de la relation « est la fille de » qui relie Y à X. Cette relation est-elle une fonction

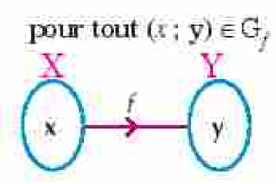


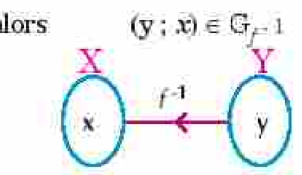
A apprendre

Fonction réciproque

Si f est une fonction injective définie de l'ensemble X vers l'ensemble Y, alors la fonction f^{-1} définie de l'ensemble Y vers l'ensemble X est appelée la fonction réciproque de la fonction f si :

pour tout $(x ; y) \in G_f$ alors $(y ; x) \in G_{f^{-1}}$





Exemple

1 Soit f une fonction dont le graphe G_f, $f = \{ (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8) \}$. Trouvez la fonction réciproque de la fonction f puis représenter les deux fonctions dans un même graphique

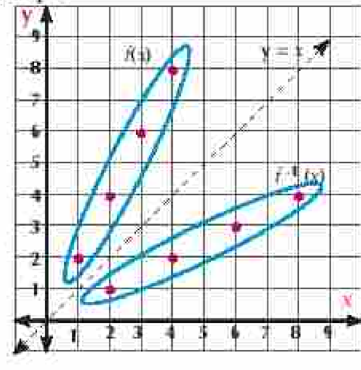
Solution

Comme la fonction f est injective, elle admet une fonction réciproque

$\because G_f = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8)\}$

$\therefore G_{f^{-1}} = \{(2; 1), (4; 2), (6; 3), (8; 4)\}$

On remarque que la fonction f et la fonction f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$





Allez apprendre

- Fonction réciproque.
- Représentation graphique d'une fonction réciproque.
- Trouvez une fonction réciproque graphiquement et algébriquement

Vocabulaires de base

- Fonction
- Fonction réciproque
- Fonction injective
- Ensemble de définition
- Ensemble image
- Symétrie



Aides pédagogiques

- Calculatrice
- Ordinateur et logiciels de graphisme

Donc $f^{-1}(x)$ est l'image de $f(x)$ par la symétre parrapport à la droite d'équation $y = x$

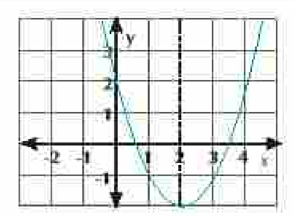
Essayez de Résoudre:

(1) Trouvez la fonction réciproque de la fonction représentée par le tableau suivant

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	7	3	1	0	$\frac{1}{2}$

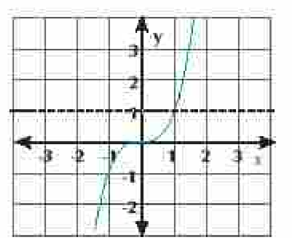
Test de la droite verticale

Si toute droite verticale coupe la courbe en un seul point, alors cette courbe représente une fonction.



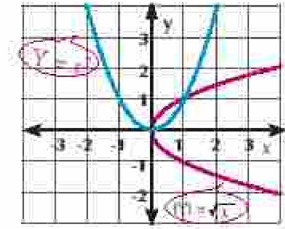
Test de la droite horizontale

Si toute droite horizontale courbe en un seul point, al courbe représente une fo injective



Remarquez que :

Si la fonction n'est pas injective (ne vérifie pas le test de la droite horizontale), alors la réciproque de cette fonction ne représente pas de fonction. $y = x^2$ (n'est pas injective) Sa réciproque $|y| = \sqrt{x}$ ne représente pas de fonction.



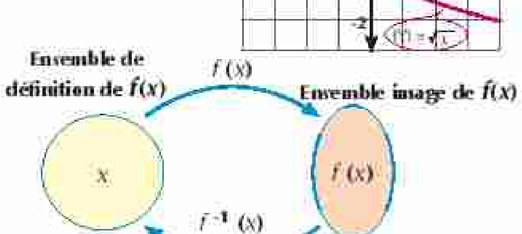
Propriétés de la fonction réciproque :

1) On dit que $f(x)$, $g(x)$sont inverse l'une à l'autre si

$(f \circ g)(x) = x$ **et** $(g \circ f)(x) = x$

2) L'ensemble définition de $f(x)$ = L'ensemble image de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$

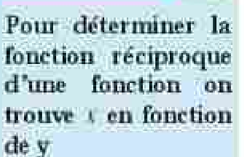
L'ensemble image de $f^{-1}(x)$ = L'ensemble définition de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$



Pensé critique:

Quel est l'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour qu'elle admette une fonction réciproque ? Trouvez dans ces conditions, la fonction réciproque.





Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction on trouve x en fonction de y



Exemple

(2) Trouvez la fonction réciproque de la fonction $f(x) = 2x + 1$ puis représentez la fonction et la fonction réciproque dans un même graphique.

Solution

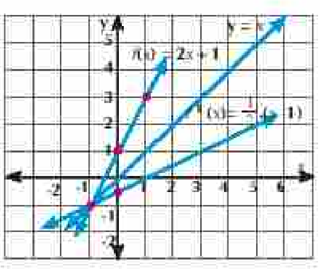
$y = 2x + 1$

$\therefore \quad x = 2y + 1$ En permutant les variables

$\therefore \quad 2y = x - 1$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2}(x - 1)$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$

x	1	0	-1
$f(x)$	3	1	-1
$f^{-1}(x)$	0	$\frac{-1}{2}$	-1



On remarque que la fonction f et la fonction réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Essayez de Résoudre:

(2) Trouvez la fonction réciproque de la fonction d'équation $y = x^3$ puis représentez la fonction et la fonction réciproque dans un même graphique

Exemple

(3) Si $f(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$ Trouvez

a) L'ensemble définition et l'ensemble image de $f(x)$

b) $f^{-1}(x)$ et son ensemble définition et son l'ensemble image

c) En utilisant un logiciel de graphisme, tracer les deux courbes des fonctions $f(x)$ et $f^{-1}(x)$

Solution

a) $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs de $x - 1 \geq 0$ d'ou $x \geq 1$

$\therefore$ L'ensemble définition de $f(x) = [\,1\,;+\infty[$

$\because \sqrt{x-1} \geq 0$

Pour toutes les valeurs de x appartenant à l'ensemble définition de la fonction

$\therefore 3 + \sqrt{x-1} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq 3$

$\therefore$ L'ensemble image de $f(x) = [3\,;+\infty[$

b) $\because y = 3 + \sqrt{x-1}$

En permutant les variables x, y

$x = 3 + \sqrt{y-1}$ $x - 3 = \sqrt{y-1}$ En élevant au carré

$(x-3)^2 = y - 1$

$\therefore y = (x-3)^2 + 1$ $\therefore f^{-1}(x) = (x-3)^2 + 1$

son ensemble définition $f^{-1}(x) = [3\,;+\infty[$ et son l'ensemble image $[1\,;+\infty[$

Essayez de Résoudre:

(3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

a) Trouvez: $f^{-1}(x)$ son ensemble définition et son l'ensemble image

b) En utilisant un logiciel de graphisme, tracez la courbe de $f(x)$, $f^{-1}(x)$

 **Exercices 2 - 4** 

(1) Complétez:

a) Si la fonction f est telle que $G\,f = \{(1 ; 4), (2 ; -3), (3 ; 1), (4 ; 0)\}$ alors $G\,f^{-1}$ = ...

b) La figure ci-contre représente une fonction $f : x \longrightarrow Y$ alors $f^{-1}(2)$ = ...

c) L'image du point (2 ; 1) par la symétrie par rapport à la droite $y = x$ est le point ....

d) Si f est une fonction injective et si $f(2) = 6$ alors $f^{-1}(6)$ = ...

e) Si $f : x \longmapsto 4x$ alors $f^{-1} : x \longmapsto$ ....

(2) Mettre le signe (✓) devant la phrase correcte et le signe (✗) devant la phrase fausse:

a) L'ensemble de définition d'une fonction est le même que celui de sa fonction réciproque (..........)

b) Une fonction croissante dans son domaine de définition admet toujours une fonction réciproque. (..........)

c) Une fonction paire admet toujours une fonction réciproque. (..........)

d) Une fonction impaire admet toujours une fonction réciproque. (..........)

(3) Trouvez la fonction réciproque de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

b) $f(x) = 4x$

c) $f(x) = 5 + \frac{4}{x}$

d) $f(x) = \frac{3}{x}$

e) $f(x) = 8x^3 - 1$

f) $f(x) = \sqrt[3]{4 - x}$

g) $f(x) = 2 + \sqrt{3 - x}$

h) $f(x) = x^2$ si $x > 0$

i) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ si $x > 1$

j) $f(x) = x^2 + 8x + 7$ si $x > -4$

k) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ si $-3 \leqslant x \leqslant 0$

l) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ si $0 \leqslant x \leqslant 3$

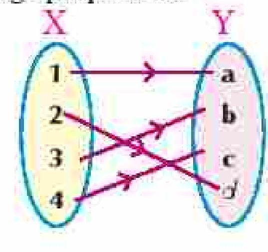
m) $f = \{(1 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 4)\}$

n

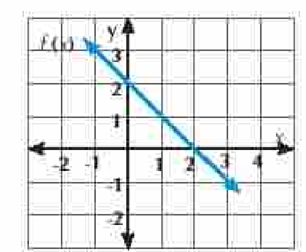
x	-2	1	2	5
$f(x)$	7	4	1	-1

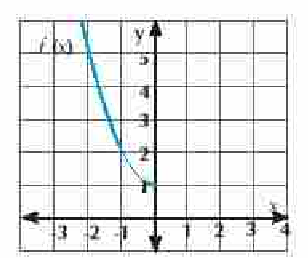
4) a) Soit $f(x) = 5x$. Trouvez $f^{-1}(x)$ puis représentez les deux fonctions graphiquement.

b) La figure ci-contre représente une fonction de X vers Y. Trouvez la valeur de f^{-1} (b) + 2 f^{-1}(c).



5) Dans chacune des figures suivantes, tracer la fonction réciproque $f^{-1}(x)$ de la fonction représentée:





6) **Décelez l'erreur :**

Waael et Rana ont essayé chacun de trouvez la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \frac{x - 5}{x}$

solution de Wael

$\because f(x) = \frac{x - 5}{x}$

$\because f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

$\therefore f^{-1}(x) = 1 \div \frac{x - 5}{x}$

$= 1 \times \frac{x}{x - 5}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-5}$

solution de Rana

$\because y = \frac{x - 5}{x}$

$\therefore x = \frac{y - 5}{y}$

$\therefore y\, x = y - 5$

$\therefore y\, x - y = -5$

$\therefore y\,(x - 1) = -5$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-5}{x - 1}$

Laquelle des deux solutions est correcte ? Pourquoi ?

7) **Question ouverte** Peut-on trouvez une fonction f telle que la fonction et sa fonction réciproque f^{-1}? sont les mêmes ? Si oui, donnez des exemples.

8) Lesquelles des fonctions suivantes admettent une fonction réciproque ?

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x$

Unité 2

2 - 5 Fonction logarithme et sa représentation graphique

Allez apprendre

- **Définition d'une fonction logarithme.**
- Représentation graphique d'une fonction logarithme.
- Transformation de la forme exponentielle en forme logarithmique et inversement.
- Résolution de quelques équations logarithmiques simples.



Vocabulaires de base

- Logarithme
- Fonction réciproque
- **Ensemble de définition**
- Logarithme usuel

Aides pédagogiques

- Logiciels.
- **Calculatrice scientifique**

Remarque



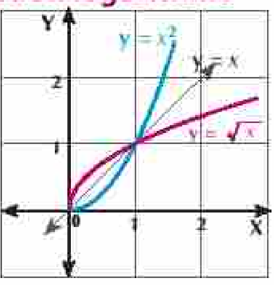
$\log_a x = y$ est une forme logarithmique, la forme exponentielle correspondante est $a^y = x$

$(-3)^4 = 81$ n'a pas de forme logarithmique correspondante.

Représentation graphique de la fonction logarithme



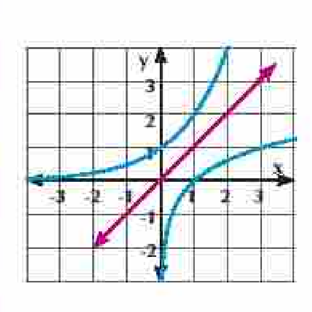
Découvrez



On sait que la fonction $y = \sqrt{x}$ est la fonction réciproque de la fonction $y = x^2$ pour tout $x > 0$ (Sa courbe est symétrique par rapport à $y = x$) Nous pouvons représenter la fonction réciproque de la fonction exponentielle f telle que $f(x) = 2^x$ en représentant les coordonnées des couples de la fonction.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



De ce qui précède, on trouve que la fonction inverse de la fonction d'équation $y = 2^x$ is $x = 2^y$ a est la fonction d'équation $x = 2^y$ est appelée logarithme de x. **qui s'écrit $y = \log_a x$ se lit y est égale au logarithme de base a de x.**

A apprendre

Fonction logarithme

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ la fonction logarithme $y = \log_a x$ est la fonction réciproque de la fonction $y = a^x$

La fonction $f(x) = \log_a x$ est appelée la fonction logarithme

① Ensemble définition de la fonction logarithme $= \mathbb{R}^+$

② Ensemble image de la fonction logarithme $= \mathbb{R}$

③ La forme $y = \log_a x$ est équivalente à la forme $a^y = x$

Transformation d'une forme exponentielle en forme logarithmique :

a $2^4 = 16$ est équivalente à $\log_2 16 = 4$ **b** $5^2 = 25$ est équivalente à $\log_5 25 = 2$

c $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ est équivalente à $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$ **d** $10^{-2} = 0.01$ est équivalente à $\log_{10} 0.01 = -2$

Essayez de Résoudre:

1. Transformez les expressions suivantes de la forme exponentielle en forme logarithmique

a $7^2 = 49$ **b** $(\sqrt{2})^{10} = 32$ **c** $(\frac{3}{5})^4 = \frac{81}{625}$ **d** $5^{-3} = \frac{1}{125}$

Logarithme décimal de base 10

Si la base du logarithme est 10, le logarithme est appelé dans ce cas Logarithme décimal.
On le note sans base.

Par exemple $\log_{10} 7$ s'écrit $\log 7$; $\log_{10} 127$ s'écrit $\log 127$

Transformation de la forme logarithmique en forme exponentielle:

a $\log_3 81 = 4$ est équivalente à $3^4 = 81$ **b** $\log_2 128 = 7$ est équivalente à $2^7 = 128$

c $\log \frac{1}{100} = -2$ est équivalente à $10^{-2} = \frac{1}{100}$ **d** $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$ est équivalente à $81^{\frac{3}{4}} = 27$

Essayez de Résoudre:

2. Transformez les expressions suivantes de la forme logarithmique en forme exponentielle:

a $\log_5 125 = 3$ **b** $\log_3 \frac{1}{243} = -5$ **c** $\log_4 1 = 0$ **d** $\log 1000 = 3$

Trouvez la valeur d'une expression logarithmique de base donnée:

Exemple

1. Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

a $\log 0.001$ **b** $\log_3 \sqrt[4]{27}$

Solution

a En posant $y = \log 0.001$

En mettant sous la forme exponentielle:

$10^y = 0.001$

$10^y = (\frac{1}{10})^3$ En mettant sous la forme exponentielle

$10^y = (10)^{-3}$ Propriété des puissances

$y = -3$ d'où $\log 0.001 = -3$

b En posant $y = \log_3 \sqrt[4]{27}$

En mettant sous la forme exponentielle :

$3^y = 3^{\frac{3}{4}}$ Propriété des puissances

$y = \frac{3}{4}$

Donc $\log_3 \sqrt[4]{27} = \frac{3}{4}$

Essayez de Résoudre:

3. Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

a $\log 0.00001$ **b** $\log_{\frac{1}{2}} 128$



Exemple

(2) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $\log_3 (2x - 5) = 1$ b) $\log_x (x + 2) = 2$

Solution

a) a L'équation est définie pour toutes les valeurs de x qui vérifient $2x - 5 > 0$; $x > \frac{5}{2}$ (Ensemble de validité de l'équation)

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente

$\therefore\ 3^1 = 2x - 5$ $\therefore\ 2x = 8$

$\therefore\ x = 4 \in$ ensemble de validité de l'équation $\therefore$ L'ensemble solution est $= \{4\}$

b) L'équation est définie pour toutes les valeurs de qui vérifient

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{C est .à. dire} \quad \begin{cases} x > -2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$x \in]0 ; +\infty[- \{1\}$

d'où l'ensemble de définition de l'équation est $]0 ; +\infty[- \{1\}$ (Domaine de définition de l'équation)

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente

$\therefore\ x^2 = x + 2$ $\therefore\ x^2 - x - 2 = 0$

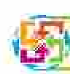
$\therefore\ (x - 2)(x + 1) = 0$ $\therefore\ x = 2$ ou $x = -1$

$\because\ x = -1 \notin$ ensemble de validité de l'équation $\therefore$ L'ensemble solution est $= \{2\}$

Essayez de Résoudre:

(4) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes

a) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ b) $\log_x 5x = 2$

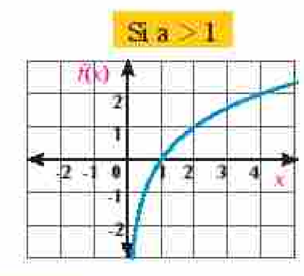


A apprendre

Représentation graphique de la fonction logarithme

La fonction f telle que $f(x) = \log_a x$ où $a \neq 1$ est représentée graphiquement comme suit:

Si $a > 1$



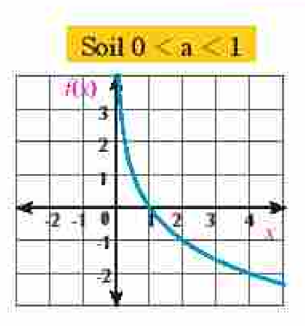
Ensemble de définition $\mathbb{R}^+$

Ensemble image: $\mathbb{R}$

Point d'intersection avec l'axe des x : (1; 0)

Sens de variation : f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Soit $0 < a < 1$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}^+$

Ensemble image : $\mathbb{R}$

Point d'intersection avec l'axe des x: $(1 ; 0)$

Sens de variation : f **est croissante sur** $\mathbb{R}^+$

Pensé critique: Peut-on déduire la relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme?



Exemple

③ Représentez, graphiquement les fonctions suivantes :

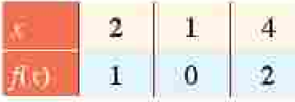
ⓐ $f(x) = \log_2 x$ ⓑ $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Solution

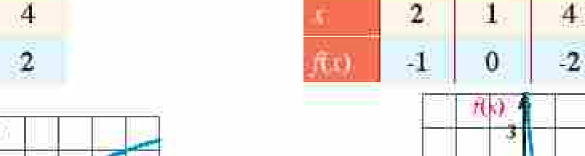
ⓐ **On remarque : que la base** $2 > 1$



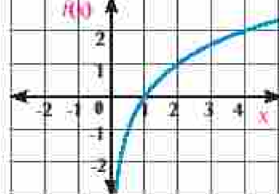
ⓑ **On remarque :** the base: $0 < \frac{1}{2} < 1$

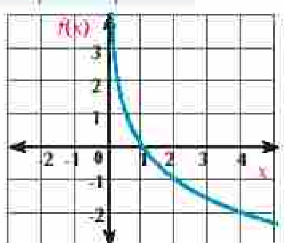


x	2	1	4
$f(x)$	1	0	2



x	2	1	4
$f(x)$	-1	0	-2





Utilisation de la calculatrice :

Nous pouvons utiliser la calculatrice pour calculer les logarithmes comme suit :

1) **Pour calculer** $\log_2 4$ on appuie sur les boutons dans l'ordre ci-contre



2) **Pour calculer** $\log 38$ on appuie sur les boutons dans l'ordre ci-dessous



Exercice :

Utilisez la calculatrice pour la valeur de chacun de ce qui suit:

ⓐ $\log_3 12$ ⓑ $\log_3 24$ ⓑ $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$ ⓓ $\log 128$



Exercices 2 - 5



1 Exprimez les expressions suivantes sous une forme logarithmique équivalente :

a $3^{-2} = \frac{1}{9}$ b $(\frac{2}{5})^4 = \frac{16}{625}$ c $5^0 = 1$ d $(\sqrt{2})^4 = 4$

2 Exprimez les expressions suivantes sous une forme exponentielle équivalente :

a $\log 100 = 2$ b $\log_2 4\sqrt{2} = \frac{5}{2}$ c $\log_7 1 = 0$ d $\log_{\sqrt{11}} 121 = 4$

3 Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a $f(x) = \log_3 (2x + 1)$ b $f(x) = 2\log x$ c $f(x) = \log_{(5-x)} (x - 3)$

4 Sans utilisez une calculatrice, trouver la valeur de :

a $\log_2 16$ b $\log_{\sqrt{5}} 5$ c $\log_8 1$ d $\log_3 3\sqrt{3}$

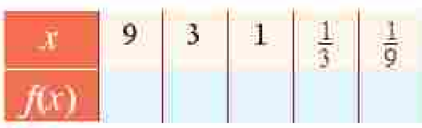
5 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_3 27 = x + 2$ b $\log_x (2x + 3) = 2$ c $\log (2x + 1) = 0$

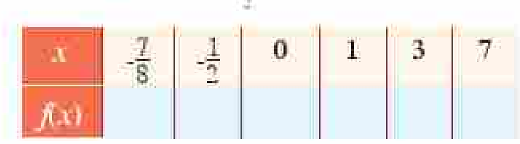
d $\log_2 (\log_3 x) = 1$ e $\log_4 [13 + \log_2 (x - 1)] = 2$ f $\log_2 (4^x - 2) = x$

6 Représentez graphiquement chacune des fonctions suivantes :

a $f(x) = \log_3 x$ b $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$



x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$f(x)$					



x	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	7
$f(x)$						

7 Dans un même graphique, tracez les deux fonction f et g telles que $f(x) = \log_2 x$ et $f(x) = 6 - x$.
De la représentation graphique, trouvez l'ensemble solution de l'équation $\log_2 x = 6 - x$.

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

8 Si $\log_3 x = 2$; alors $x =$ ....

a 9 b 8 c 3 d 5

9 Si $\log_a 16 = 4$ alors a $\in$ ....

a $\{16\}$ b $\{2\}$ c $\{2; -2\}$ d $\{1\}$

10 $\log_5 125 =$ ....

a $\sqrt{3}$ b 3 c 5 d 125

11 L'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = \log_{(1-x)} 3$ est ....

a) $]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[$ b) $]-\infty\,;1[$ c) $]1\,;\infty[$ d) $]-1\,;1[$

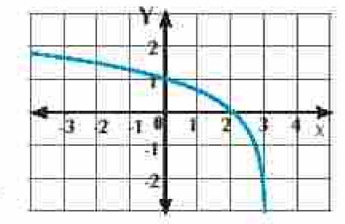
12 $\log 100 =$ ....

a) 1 b) 2 c) 3 d) -1

13 Si la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \text{Log}_a\, x$ passe par le point (8; 3): alors $f(4) =$

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) -2

14 La figure ci-contre représente la fonction ....



a) $y = 3^{x-1}$ b) $y = 3^{x+1}$

c) $y = \log_3(2 - x)$ d) $y = \log_3(3 - x)$

15 Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit puis vérifiez le résultant en utilisant la calculatrice :

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 \frac{1}{8}$ c) $\log_{\sqrt{7}} 343$ d) $\log\ 0{,}001$

16 Trouvez la valeur de chacun de ce qui suit puis vérifiez le résultant en utilisant la calculatrice:

a) $\log_{81} = \frac{3}{4}$ b) $\log_3(2x - 5) = 0$ c) $\log_x(x + 6) = 2$

d) $\log_5 \log_2 \log_3 x = 0$ e) $\log_3(\frac{x^2}{2x-3}) = 1$ f) $\log_5|2x + 1| = 1$

17 **En lien avec l'enseignement:** Si la relation entre le degré de mémorisation des connaissances étudiées par un étudiant, en première secondaire, et le nombre de mois écoulés (t) depuis la fin de cette année d'étude est donnée par la formule: $f(n) = 70 - 4\log_2(n + 1)$
trouve le degré de mémorisation étudiées :

a): au mois où l'étudiant termine l'étude en première secondaire ($n = 0$)

b): après 7 mois de la fin d'étude en première secondaire.

18 **Applications :** Une étude pour mesurer le degré de mémorisation des connaissances étudiées en une matière par un groupe d'étudiants consiste à repasser un examen dans la matière de temps en temps. Si les notes d'un étudiant sont données par la relation $f(n) = 85 - 25\log(n + 1)$, où t est le nombre de mois écoulés après la fin de l'étude et $f(t)$ est la note de l'étudiant **(en pourcentage)**, trouver .

a) la note de l'étudiant dans cette matière.

b) la note de l'étudiant 3 mois après la fin d'étude de cette matière.

c) la note de l'étudiant un an après la fin d'étude de cette matière.

Unité 2

2 - 6 Quelques propriétés des logarithmes

Allez apprendre

- Utilisation de quelques pro-prié-tés des logarithmes.
- Résolution des équations loga-rithmiques.
- Utilisation de la calculatrice pour résoudre des équations exponentielles.
- Applications de la viequotidi-enne sur les logarithmes.

Vocabulaires de base

- Equations logarith-miques
- Echelle de Richter

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Ordinateur
- Logiciels de graphisme

Découvrir

En utilisant une calculatrice, Trouvez la valeur de

1) $(\log_2 4 + \log_2 8)$, $\log_2 32$ **2)** $(\log 40 + \log \frac{5}{2})$, $\log 100$

3) $(\log_3 27 - \log_3 9)$, $\log_3 3$Qu'en déduisez-vous ?

A apprendre

Quelques propriétés des logarithmes

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ **1)** $\log_a a = 1$ **2)** $\log_a 1 = 0$

Essayez de démontrer les propriétés 1 et 2 à l'aide de la définition du logarithme

3) Propriété du logarithme d'un produit :

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ où x et $y \in \mathbb{R}^+$

Pour démontrer cette propriété :

On pose $b = \log_a x$ et $c = \log_a y$

D'après la définition du logarithme :

$x = a^b$, $y = a^c$

Donc $xy = a^b \times a^c$ i.e. $xy = a^{b+c}$

En transformant le résultat sous la forme logarithmique :

$\log_a xy = b + c$

En substituant les valeurs de b et c on a $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Exemple

1 Trouver la valeur de $\log_2 10$ dans sa forme la plus simple sachant que $\log_2 5 \simeq 2.3219$ puis vérifier le résultat en utilisant une calculatrice

Solution

$\log_2 10 = \log_2 (2 \times 5)$

$= \log_2 2 + \log_2 5$ En utilisant la propriété du logarithme du produit

$= 1 + 2.3219 \simeq 3.3219$ En utilisant la propriété et la substitution

La vérification en utilisant une calculatrice :

    3.321928095

Essayez de résoudre :

1) Trouvez la valeur de $\log_3 15$ dans sa forme la plus simple sachant que $\log_3 5 \simeq 1.465$ vérifiez le résultat en utilisant une calculatrice

4) Propriété du logarithme d'un quotient :

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ où $x, y \in \mathbb{R}^+$ et $y \in R^+$ **(Essayer de démontrer cette propriété)**



Exemple

2) Trouver la valeur de l'expression : log30 - log3 .

Solution

$\log 30 - \log 3 = \log \frac{30}{3} = \log 10 = 1$

Essayez de résoudre :

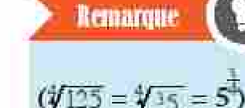
2) En utilisant la propriété du logarithme du quotient, démontrer que : $\log 2 = 1 - \log 5$

5) Propriété du logarithme d'une puissance :

$\log_a x^n = n \log_a x$ où $n \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $a \in \mathbb{R}^+$ et $a \neq 1$

Exemple

3) Trouver dans sa forme la plus simple $\log_5 \sqrt[4]{125}$





$(\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}})$

Solution

$\log_5 \sqrt[4]{125} = \log_5 (5)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_5 5 = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

Essayez de résoudre :

3) Trouver dans sa forme la plus simple

$\log_3 \sqrt[7]{243}$, $\log_7 \sqrt[4]{343}$

Remarque: $\log_a (\frac{1}{x}) = -\log_a x$ oú $x \in \mathbb{R}^+$

6) Propriété du changement de base du logarithme :

Si $x \in \mathbb{R}^+$ and y , $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, démontrer que : $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

Démonstration (Ne fait pas l'objet d'un examen)

soit: $z = \log_y x$

$y^z = x$ — En transformant sous la forme exponentielle

$z \log_a y = \log_a x$ — En calculant le logarithme de chaque membre en base a

On obtient D'où $z = \frac{\log_a x}{\log_a y}$ c.a.d: $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

Essayez de résoudre :

4) Utilisez la propriété 6 pour trouver la valeur de : a) $\log_4 8$ b) $\log_9 243$

7- Propriété de l'inverse : $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Réflexion critique : Si $a, b \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ démontrer que $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de : $\log_3 7 \times \log_7 3$ Simplification des expressions logarithmiques .

Résolution des équations logarithmiques:

Exemple

4) Mettez sous la forme la plus simple :

a) $2\log 25 + \log(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) + 2\log 3 - \log 30$ b) $\log_5 49 \times \log_8 5 \times \log_9 8 \times \log_7 9$

Solution

a) L'expression $= \log 25^2 + \log\frac{8}{15} + \log 3^2 - \log 30$ — Propriété 5

$= \log(25^2 \times \frac{8}{15} \times 3^2 \times \frac{1}{30})$ — Propriétés 3 et 4

$= \log 100 = 2$

b) L'expression $= \frac{\log 49}{\log 5} \times \frac{\log 5}{\log 8} \times \frac{\log 8}{\log 9} \times \frac{\log 9}{\log 7}$ — Propriété 6

$= \frac{\log 49}{\log 7} = \frac{2\log 7}{\log 7} = 2$

Essayez de résoudre :

5) Simplifiez : $\log 0.009 - \log\frac{27}{16} + \log 15\frac{5}{8} - \log\frac{1}{12}$

6) Démontrez que : $\frac{\log 729 - \log 64}{\log 9 - \log 4} = 3$

7) Si $x^2 + y^2 = 8xy$, Démontrez que: $2\log(x+y) = 1 + \log x + \log y$

Résolution des équations logarithmiques :



Exemple

5 Trouvez dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=\log_3 8$ **b** $\log_3 x+\log_x 3=2$

Solution

a L'équation est définie pour tout $x \in \{x: x-1>0\} \cap \{x: x+1>0\}$

Donc $x>1$ (est l'ensemble de validité de l'équation)

$\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=\log_3 8$

$\therefore \log_3(x-1)(x+1)=\log_3 8$ **Propriété 3**

$\therefore x^2-1=8$ $\therefore x^2=9$ alors $x=\pm 3$

$x=-3$ n'appartient pas à l'ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ L'ensemble solution est $\{3\}$

b L'équation est définie pour tout $x>0$, $x \neq 1$

$\therefore \log_3 x+\dfrac{1}{\log_3 x}=2$ **Propriété 7**

$\therefore (\log_3 x)^2+1=2\log_3 x$ **En multipliant par $\log_3 x$**

$\therefore (\log_3 x)^2-2\log_3 x+1=0$ $\therefore (\log_3 x-1)^2=0$

$\therefore \log_3 x=1$ $\therefore x=3 \in$ L'ensemble de validité de la fonction

$\therefore$ L'ensemble solution est $\{3\}$

Essayez de résoudre :

8 Trouver dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$ **b** $\log(8-x)+2\log\sqrt{x-6}=0$ **c** $\log x-\log_x 100=1$

Résolution des équations exponentielles en utilisant les logarithmes

Exemple **En calculant le logarithme de chaque membre**

6 Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centièmes près

a $2^{x+1}=5$ **b** $5^{x-2}=3\times 4^{x+1}$

Solution

a $2^{x+1}=5$ **En calculant le logarithme de chaque membre**

$\therefore \log 2^{x+1}=\log 5$ $\therefore (x+1)\log 2=\log 5$

$\therefore x+1=\dfrac{\log 5}{\log 2}$ **d'où :** $x=\dfrac{\log 5}{\log 2}-1$ $\therefore x\simeq 1.32$

L'utilisation de la calculatrice

log 5 (÷ log  (- 1 = **1.321928095**

b $5x^{-2} = 3 \times 4x^{+1}$ **En prenant le logarithme de chaque membre**

$\therefore \log 5^{x-2} = \log(3 \times 4^{x+1})$ $\therefore \log 5^{x-2} = \log 3 + \log 4^{x+1}$

$\therefore (x-2)\log 5 = \log 3 + (x+1)\log 4$ $\therefore x\log 5 - 2\log 5 = \log 3 + x\log 4 + \log 4$

$\therefore x\log 5 - x\log 4 = \log 3 + \log 4 + 2\log 5$ $\therefore x(\log 5 - \log 4) = \log 3 + \log 4 + 2\log 5$

$$\therefore x = \frac{\log 3 + \log 4 + 2\log 5}{\log 5 - \log 4} \simeq 25.56$$

En utilisant la calculatrice :

log 3 (+ log 4 (+ 2 log 5 (= ÷) log) 5 (- log 4 = **25.56104553**

Essayez de résoudre :

9 Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un dixièmes près $\frac{1}{10}$:

a $3^{7-2} = 13.4$ **b** $7^{x-2} = 4^{x+3}$

Exemple Applications sur les Lois de logarithms laws

7 **Liens avec la Géologie :** Si l'intensité d'un tremblement de terre sur l'échelle de Richter est donnée par la relation $f = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I est la force du tremblement de terre et I_0 la force initiale (c'est la plus petite force du mouvement de la terre non détecté par l'échelle).

a Trouver sur l'échelle de Richter l'intensité d'un tremblement de terre dont la force est équivalente à 10^6 fois sa force initiale.

b En 1989 , il ya eu un tremblement de terre d'intensité 7,1 sur l'échelle de Richter. Calculer sa force.

Solution

a $\because f = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, $I_0 = 10^6\, I_0$ $\therefore f = \log\left(\frac{10^6 I_0}{I_0}\right) = \log^6 10 = 6\log 10 = 6$

Donc l'intensité du tremblement de terre = 6. sur l'échelle de Richter

b $\because$ L'intensité du tremblement de terre = 7.1

$\therefore 7.1 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ $\therefore \frac{I}{I_0} = 10^{7.1}$ $I = 10^{7.1} I_0$

Donc La force du tremblement de terre est équivalente à 12590000 fois sa force initiale.

Essayez de Résoudre:

10 Si le nombre d'habitants d'une ville, à partir de l'année 2000, est donné par la relation $N = 10^5\,(1.3)^{n-2010}$, où n est le nombre d'habitants et a l'année.

a Calculer le nombre d'habitant de cette ville en 2015

b En quelle année, le nombre d'habitants de cette ville deviendra 1,4 million d'habitants



1 Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de

a $\log 1000$ **b** $\log_2 32$ **c** $\log_{\frac{1}{4}} 16$ **d** $\log_7 49$

e $\log 0.001$ **f** $\log_8 2$ **g** $\log_8 1$ **h** $\log_y \sqrt{y}$

2 Mettez dans sa forme la plus simple

a $\log 2 + \log 5$ **b** $\log_5 15 - \log_5 3$ **c** $\dfrac{\log 25}{\log 5}$

d $\log_2 5 \times \log_5 2$ **e** $\log 54 - 3\log 3 - \log 2$ **f** $1 + \log 3 - \log 2 - \log 15$

g $\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c$ **h** $\dfrac{1}{\log_2 12} + \dfrac{1}{\log_8 12} + \dfrac{1}{\log_9 12}$

3 Mettez le signe (✓) devant la phrase correcte et le signe (✗) devant la phrase fausse où x et $y \in \mathbb{R}^+$; a et b $\in \mathbb{R}^+ - \{1\}$:

a $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$ ( )

b $\log_a(x+y) = \log_a x \times \log_a y$ ( )

c $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ( )

d $\log 2x^5 = 5\log 2x$ ( )

e $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x + \log_a y^{-1}$ ( )

f $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}$ ( )

g Si $x < 0$ alors $\log_a x^4 = 4\log_a x$ ( )

4 Si $\log 2 = x^8$; $\log 3 = y$ trouver la valeur de $\log 6$ et $\log_{18} 12$ en fonction de x et y

5 Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centième près :

a $7^{3x-2} = 5$ **b** $7^{x+1} = 3^{x-2}$ **c** $\dfrac{5}{10^{2x}} = 7$ **d** $x^{\log x} = 100\,x$

6 Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

- **a** $\log_4 x = 1 - \log_4 (x - 3)$
- **b** $\log_3 (x + 6) = 2 \log_3 x$
- **c** $\log (x + 8) - \log (x - 1) = 1$
- **d** $(\log x)^2 - \log x^2 = 3$
- **e** $(\log x)^3 = \log x^9$
- **f** $3^{\log x} = 2^{\log 3}$
- **g** $\log_3 x = \log_x 3$
- **h** $\log_2 x + \log_x 2 = 2$
- **i** $\log_2 (2^x - 4) + x - 5 = 0$

7 Utilisez une calculatrice pour trouver la valeur de :

- **a** $\log 3.15$
- **b** $\log_2 25$
- **c** $2 \log 5 - 3 \log 7$
- **d** $\frac{3^{150} \times 5^{200}}{7^{250}}$

8 Utiliser une calculatrice pour trouver le nombre de chiffres du nombre 4^{47}

9 **En lien avec la Chimie :** Le potentiel hydrogène (PH) est donné par la relation

PH = $-\log (H^+)$ où (H^+) est la concentration des ions hydrogène en g/l dans un milieu donné

- **a** Calculer le potentiel hydrogène dans une solution dont la concentration des ions hydrogène est égale à 10^{-3}
- **b** Calculer la concentration des ions hydrogène dans une solution dont le potentiel hydrogène est égal à 9

10 **Croissance de la population :** Le nombre n d'habitants d'une ville augmente annuellement de 7%

- **a** Trouver une formule exprimant le nombre d'habitants dans un an.
- **b** Au bout de combien d'années le nombre d'habitants sera doublé sachant que le taux d'augmentation annuel ne change pas

11 Si $x = 5 + 2\sqrt{6}$ trouvez dans sa plus simple forme la valeur de $\log (\frac{1}{x} + x)$

12 **Décelez l'erreur :** Amira et Israa ont simplifié chacune l'expression : $\log x^3 + \log y^4 - \log x y^2$

Solution d'Israa

L'expression $= \log \frac{x^3 \times y^4}{x y^2} = \log x^2 y^2$

$= \log (x y)^2 \quad = 2 \log x y$

$= 2 (\log x + \log y)$

Solution d'Amira

L'expression $= 3 \log x + 4 \log y - 2 \log x y$

$= 3 \log x + 4 \log y - 2 (\log x + \log y)$

$= 3 \log x + 4 \log y - 2 \log x - 2 \log y$

$= \log x + 2 \log y$

Laquelle des deux solutions est correcte. Justifier votre réponse ?

13 **Réflexion critique:** Sans utiliser une calculatrice, Trouvez la valeur de :

$\log (\tan 1°) + \log (\tan 2°) + \log (\tan 3°) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \log (\tan 89°)$

Résumé de l'unité

1) Puissances entières

a $a^n = a * a * a * \dots * a$ (où le facteur a est répété n fois)

b $a^0 = 1$ pour tout $\in R - \{0\}$

c $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ où $a \neq 0$

Propriétés de puissances entières Pour tout $m , n \in \mathbb{Z}$, $a , b \in \mathbb{R} - \{0\}$, :

a $a^m * a^n = a^{m+n}$

b $(ab)^n = a^n b^n$

c $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

d $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

e $(a^m)^n = a^{mn}$

2) Racine $n^{ième}$

L'équation $x^n = a$ où $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ admet n racines

a Si n est pair et $a \in \mathbb{R}^+$

Il y a deux racines réelles, l'une est positive et l'autre est négative (les autres racine des nombres complexes). La racine réelle nième positive notée $\sqrt[n]{a}$ est appelée la principale du nombre a

b Si n est pair et $a \in \mathbb{R}^-$ L'équation n'admet pas de racines réelles)

c Si n est impair et $a \in \mathbb{R}$ L'équation admet une racine réelle unique (les autre racines sont des nombres complexes) racine est appelée la racine principale

d Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $a = 0$

L'équation $x = 0$ admet une racine réelle unique qui est égale à zéro

3) Propriétés des racines $n^{ième}$: Si $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}^+$ alors

a $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

b $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

c $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

d $\sqrt[n]{a^n} = a$ Si n impair $= |a|$ Si n pair

4) Puissances fractionnaires $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ où $\sqrt[n]{a^m} \in \mathbb{R}$

5) Propriétés des puissances fractionnaires

a $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$

Cette relation est valable si $a < 0$, n est impair > 1

b $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \in \mathbb{R}$, m, n sont des nombres entiers qui n'ont pas de facteurs communs, $n > 1$, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$

6) Fonction exponentielle Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ alors f alors la fonction f est appelée une fonction exponentielle de base a

7) Propriétés de la courbe de la fonction exponentielle

a) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ b) L'ensemble image est $\mathbb{R}^+$

c) La fonction est croissante sur son ensemble de définition pour tout $a > 1$ Dans ce cas, la fonction est appelée fonction de croissance exponentielle

d) La fonction est décroissante sur son ensemble de définition pour tout $0 < a < 1$ Dans ce cas, la fonction est appelée fonction de décroissance exponentielle

8) L'equation exponentielle:

Si $a^n = a^m$ où $a \notin \{0; 1; -1\}$ alors $m = n$

Si $a^n = b^n$ où $a, b \notin \{0; 1; -1\}$ alors

$n = 0$ **ou** $a = b$ Si n impair **ou** $a = |b|$ Si n pair

9) Fonction réaroque: Si f est une fonction injective de $X \longrightarrow Y$, alors $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ est appelée la fonction réciproque de f Si pour tout $(x, y) \in f$ alors $(y, x) \in f^{-1}$

10) La courbe de la fonction f^{-1} est l'image de la courbe dans la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$

11) Pour qu' une fonction f admette une réciproque elle faille qu' elle soit une fonction injective on peut vérifier par le test de la droite horizonale si la droite coupe la courbe en un point au plus alors la courbe repésente un fonction injective)

- On dit que $f(x)$ et $g(x)$ sont réciproque l'une à l'autre si $(f \circ g)(x) = x$ et $(g \circ f)(x) = x$
- L'ensemble de définition $f(x)$ est lui même l'ensemble image de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$
- L'ensemble image de $f(x)$ est l'ensemble de définition de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$

12) La fonction logarithme

a) Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ alors la fonction $y = \log_a x$ est la fonction inverse de la fonction $y = a^x$

b) $a^b = c$ alors $b = \log_a c$ (Transforme de la forme exponentielle à la forme logarithme

c) Logarithme normale de base 10 {remarque $\log 5 = \log_{10} 5$ }

13) Propriétés de la fonction logarithmes

a) l'ensemble de difinition $= \mathbb{R}^+$ b) L'ensamble image $= \mathbb{R}$

c) La fonction $y = \log_a x$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$

14) Prospérités des logarithmes: Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

a) $\log_a a = 1$ b) $\log_a 1 = 0$ c) $\log_a x^m = m \log_a x$ **où** $x > 0$

d) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ où $x, y > 0$

e) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ où $x, y > 0$

f) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ où $x > 0$, $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ g) $\log_a x * \log_x a = 1$

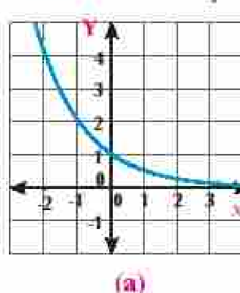

Exercices généraux

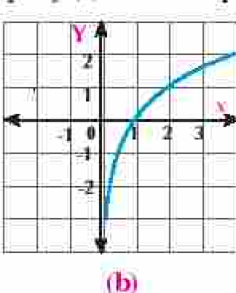

1 Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

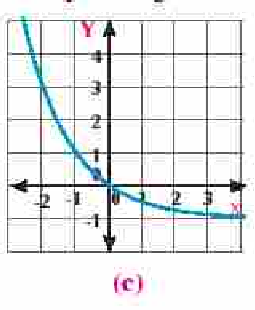
a Si $3^x = 5$ alors $x =$

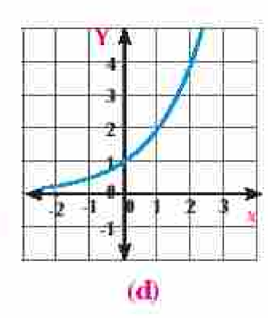
(a) 2 **(b)** $\log_3 5$ **(c)** $\log_5 3$ **(d)** $\frac{5}{3}$

b La fonction f telle que $f(x) = 2^x$ est représentée par la figure


(a)


(b)


(c)


(d)

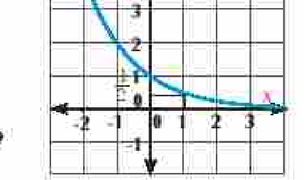
c $\log_{\sqrt{3}} 81 =$

(a) 4 **(b)** 8 **(c)** -4 **(d)** $\frac{32}{3}$

d $\dfrac{a^{x+2} + a^{x+1} + a^{x}}{a^{x+1} + a^{x} + a^{x-1}} =$

(a) a **(b)** a - 1 **(c)** ax **(d)** 1

e La figure ci-contre représente la fonction f telle que



(a) $f(x) = 2^{x+1}$ **(b)** $f(x) = 2^{-x}$

(c) $f(x) = 3^{-x}$ **(d)** $f(x) = 2^{x}$

f Lequel parmi ce qui suit est équivalente à l'expression $\dfrac{2 \log 7}{\log 7 + \log 6}$?

(a) $\dfrac{\log 7}{\log 6}$ **(b)** $\dfrac{\log 49}{\log 42}$ **(c)** $\dfrac{2}{\log 6}$ **(d)** $\log \frac{7}{6}$

g Si $\log_2 (x - 4) = 4$ alors $x =$

(a) 4 **(b)** 20 **(c)** 16 **(d)** 18

h $\log 0.01 =$

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** -1 **(d)** -2

i Si la courbe de la fonction $y = \log_4 (1 - a\,x)$ passe par le point de coordonnées $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ alors a =

(a) 2 **(b)** 3 **(c)** 4 **(d)** 8

2 Déterminez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes

a $5^{x-2} = \frac{1}{125}$ **b** $(\sqrt{3})^{x-4} = 1$ **c** $7^{x-2} = 5^{x-2}$

d $x^{\frac{2}{3}} = 4$ **e** $x^{\log x} = 10$ **f** $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$

g $\log_2 x + \log_4 x = -\frac{3}{2}$ **h** $\log(x+3) - \log(x+2) = 1$

3 Complétez

a Si $2^x = 5$ alors $4^x =$ ....

b L'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = 3^x$ est .... et son ensemble image est ....

c L'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = \log_2 x$ est .... et son ensemble image ....

d $\log_3 5 \times \log_5 3 =$ ....

e La courbe représentative de la fonction $y = \log_2(3 - x)$ coupe l'axe des abscisses au point ....

f Si $\log_3 x = 4$ alors $x =$ ....

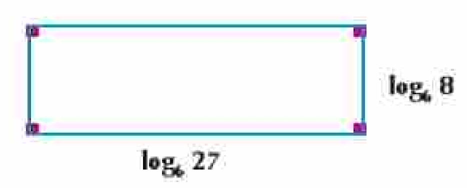
4 Complétez le tableau en utilisant l'équivalence entre les deux formes $y = \log_b x$ et $b^y = x$

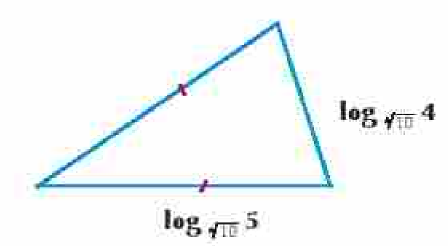
Forme exponentielle	Forme logarithmique
$2^5 = 32$	....
....	$\log_3 81 = 4$
$x = y^z$	....
....	$\log 10 = 1$
$16^{\frac{1}{4}} = 2$	....
....	$\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$

5 Représentez graphiquement chacune des fonctions suivantes

a $f(x) = (\frac{3}{2})^x$ **b** $f(x) = \log_2(x + 1)$

6 Trouvez, dans sa forme la plus simple, le périmètre de chacune des figures suivantes







Épreuve cumulative



1 Trouvez la valeur de

a $(-32)^{\frac{3}{5}}$ b $\sqrt[4]{16^{-3}}$ c $\log_{0,09}(0,3)^{-2}$

2 Mettez dans sa forme la plus simple

a $\frac{5^{2x} \times 4^{x}}{10^{2x-1}}$ b $\frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}}$ c $\log_6 4 + 2\log_6 3$

3 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes

a $2^{x} = 10$ arrondir le résultat à un dixième près

b $\log_5 x + \log_5 3 = 2$

c $2^{x} - 2^{x+1} + 2^{x-1} = -1$

d $x^{\frac{10}{3}} - 33x^{\frac{5}{3}} + 32 = 0$

4 Choisissez la bonne réponse

a Le nombre $2^{24} + 2^{23} + 2^{22}$ is divisible by ....

(a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) 9

b Si $\log(x + 11) = 2$ alors $x =$ ....

(a) - 9 (b) 22 (c) 89 (d) 91

c La somme des racines réelles de l'équation $x^4 = 16$ is ....

(a) 2 (b) -2 (c) ±2 (d) 0

d $\log(\cos\theta) + \log(\sec\theta) =$ .... , $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

(a) a (b) 0 (c) 2 (d) -1

5 Si $\log(x + y) = \frac{1}{2}(\log x + \log y) + \log 2$. Démontrez que $x = y$.

6 **En lien avec la Physique :** La période d'un pendule est donnée par la relation $n = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, où n est le temps en secondes, ℓ est la longueur du pendule en centimètres et g est l'accélération de l'attraction terrestre qui est égale à 9,8 m/s²

a Trouver la période d'un grand pendule de longueur 73 cm.

b On veut fabrique un pendule dont la période ne dépasse pas 10 secondes. Quelle faudrait être la longueur du pendule ?

7 **Lien avec la Géologie:** On mesure l'intensité I d'un tremblement de terre sur l'échelle de Richter par la relation : $m = \log x$, où x est l'amplitude de l'onde causant le tremblement de terre. De combien de fois est égale l'amplitude de l'onde causant un tremblement de terre d'intensité 10 degrés sur l'échelle de Richter par rapport à une autre d'intensité 7 degrés sur la même échelle ?



Unité (3)

Limites et continuité

Introductionde l'unité

Les premières idées sur le calcul différentiel et intégral sont apparues dans les travaux d'Archimède, qui a mis en place plusieurs lois en géométrie comme le volume et l'aire de la surface de la sphère en utilisant des méthodes précurseurs dans le calcul intégral. Au xvième et au xvième siècle, de nombreux savants se sont intéressés à des problèmes dont la résolution nécessite le calcul différentiel jusqu'à ce que l'Anglais Newton et l'Allemand Leibniz ont découvert chacun de son côté la théorie de base du calcul différentiel et intégral. Le calcul différentiel et intégral est une branche des mathématiques qui étudie les limites, la dérivée, l'intégral et les suites infinies. C'est une science qui étudie et qui analyse la variation des fonctions. Le calcul différentiel et intégral entre dans de nombreuses applications en géométrie et dans différents domaines scientifiques où il y a besoin d'étudier la variation de la fonction, son changement et la résolution des problèmes que l'algèbre ne peut résoudre facilement.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître les bases des limites.
- Reconnaître les formes indéterminées comme $\frac{0}{0}$; $\frac{+\infty}{+\infty}$; $+\infty - \infty$; $0 \times +\infty$; ...
- Déterminer une méthode pour calculer la limite d'une fonction. Par la substitution directe, par la factorisation, par la division euclidienne ou en multipliant par le conjugué.
- Calculer les limites en utilisant la formule $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\,a^{n-1}$
- Calculer les limites en utilisant la formule $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$
- Calacler les limites d'une fonction à l'infini.
- Calculer les limites de certaines fonctions trigonométriques.
- Utiliser les logiciels de graphisme pour vérifier la limite d'une fonction et pour estimer une limite sous forme d'activité.
- Identifier la limite à droite et la limite à gauche d'une fonction en un point où la diffinition de la fonction est changée.
- Identifier la notion de la continuité d'une fonction.
- La continuité d'une fonction en un point – La continuité d'une fonction dans un intervalle.
- Redéfinir quelques fonctions discontinues pour qu'elles deviennent continues.
- Découvrir des applications (exercices et activités) variées sur les notions de base des limites des fonctions et leur continuité.

Vocabulaires de base

- Quantité indéterminée
- Indéfini
- Limite à droite
- Limite à gauche
- Limite d'une fonction
- Substitution directe
- Fonction polynôme
- Limite d'une fonction à l'infini
- Fonction trigonométrique
- Limite d'une fonction trigonométrique
- Continuité d'une fonction

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique – Ordinateur – Logiciels de graphisme

Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1) : Introduction aux limites.

Leçon (3 - 2) : Déterminé la limite d'une fonction algébriquement.

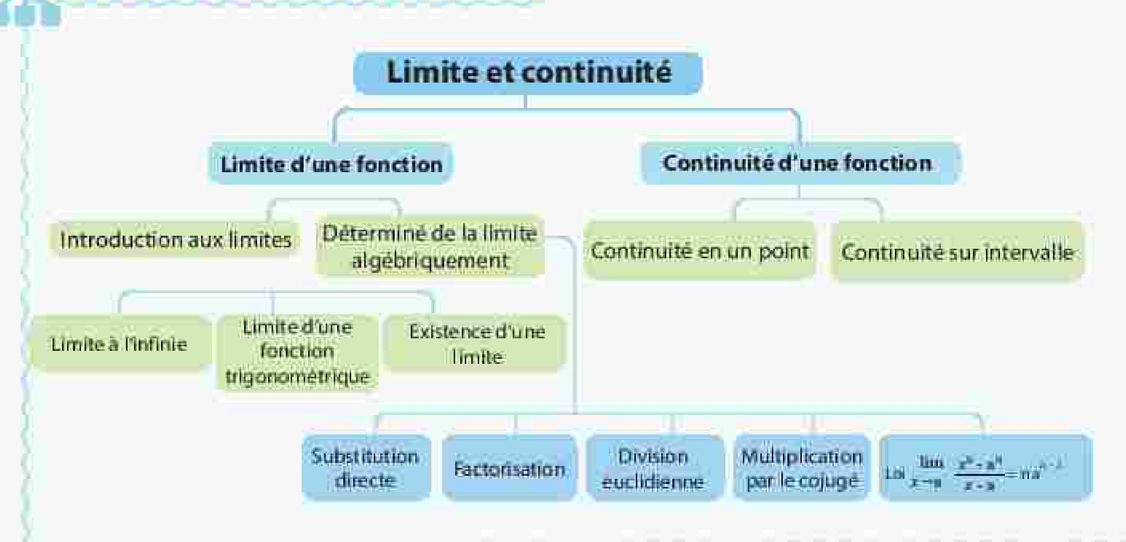
Leçon (3 - 3) : Limite d'une fonction à l'infini.

Leçon (3 - 4) : Limite des fonctions trigonométriques.

Leçon (3 - 5) : Existence de la limite d'une fonction en un point donné.

Leçon (3 - 6) : Continuité.

Organigramme de l'unité



Unité (3)

3 - 1 Introduction aux limites

Allez apprendre

- Quantités indéterminées
- Limite d'une fonction en un point

Vocabulaires de base

- Quantité indéterminée
- Indéfini
- Ensemble des nombres réels prolongé
- Limite à droite
- Left limit
- Valeur de la fonction
- Limite d'une fonction

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

La notion de la limite d'une fonction en un point est des notions essentielles à la science de calcule différentiel. Dans cette unité, nous allons reconnaître la notion de la limite d'une fonction dans les cadres graphique et algébrique. Mais reconnaissons d'abord les différents types des quantités dans l'ensemble des nombres réels.



$+\infty$ est un symbole qui indique le plus grand nombre réel qui peut être imaginé.

Trouvez le résultat de ce qui suit, si cela est possible...:

1. 3×5
2. $28 : 4$
3. $4 - 9$
4. $7 : 0$
5. $0 : 0$
6. $\infty + 3$
7. $+\infty : +\infty$
8. $+\infty - \infty$

Quantités indéterminées



Dans la rubrique «Réfléchissez et discutez» on trouve que les résultats des opérations sont parfaitement déterminés dans les questions 1 ; 2 ; 3 tandis qu'ils ne le sont pas dans les autres cas.

On remarque que 7 : 0 est indéfinie car la division par 0 n'a pas de sens. De même, on ne peut pas déterminer le résultat de l'opération 0 : 0 car il existe une infinité de nombres en les multipliant par 0 on obtient 0 .

C'est pour cela que $\frac{0}{0}$ est une quantité indéterminée. Les quantités $\frac{+\infty}{+\infty}$, $+\infty - \infty$, $0 \times +\infty$ sont également indéterminées **(Pourquoi)?**

Pour votre connaissance

On effectue les opérations sur l'ensemble des nombres réels est les deux symbols $+\infty$ et $-\infty$ comme ce qui suit :

1- $+\infty + a = +\infty$

2- $-\infty + a = -\infty$

3- $+\infty \times a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$

4- $-\infty \times a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a < 0 \\ -\infty \text{ si } a > 0 \end{cases}$



Exemple

1 Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible:

a $4+(+\infty)$	**b** $3 - \infty$	**c** $0 \quad 3$	**d** $-5 \quad 0$
e $(+\infty)+(+\infty)$	**f** $0 \quad 0$	**g** $5\times(+\infty)$	**h** $-6\times(-\infty)$

Solution

a $+\infty$	**b** $-\infty$	**c** 0	**d** Indéfini
e $+\infty$	**f** Quantité indéterminée		**g** $+\infty$
h $+\infty$			

Essayez de résoudre

1 Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible:

a $0 \quad (-2)$	**b** $7 \quad 0$	**c** $9 \quad +\infty$	**d** $+\infty\times 0$
e $(-7)\times(+\infty)$	**f** $(-\infty)+12$	**g** $(+\infty)+(+\infty)$	**h** $(+\infty)\div(+\infty)$

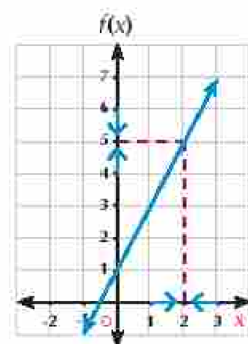
Limite d'une fonction en un point:



Etudier les valeurs de la fonction f telle que $f(x) = 2x + 1$ quand x tend vers 2 à travers les données du tableau suivant:

$x > 2$	$f(x)$
2.1	5.2
2.01	5.02
2.001	5.002
2.0001	5.0002
......	......
↓	↓
$x \to 2^+$	$f(2^+) \to 5$

$x < 2$	$f(x)$
1.9	4.8
1.99	4.98
1.999	4.998
1.9999	4.9998
......	......
↓	↓
$x \to 2^-$	$f(2^-) \to 5$



On remarque que:

Quand x tend vers le nombre **2** du côté droite ou du côté gauche, $f(x)$ tend vers **5**. On exprime cette relation mathématiquement par $\lim_{x \to 2} (2x + 1) = 5$ la représentation graphique explique cette relation.



Si la valeur de la fonction $f(x)$ tend vers une valeur réelle unique ℓ quand x tend vers le nombre réel a soit du côté droit et du côté gauche, alors la limite de la fonction est égale à $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Il se lit: la limite de la fonction $f(x)$ si x tends vers a est égale à ℓ



Exemple

Estimé la limite (La limite est égale à la valeur de la fonction)

(2) Estimez $\lim_{x \to 2} (2 - 3x)$ graphiquement et à partir d'une étude numérique.

Solution

Graphiquement: On représente la fonction affine: $y = 2 - 3x$ comme dans la figure ci-contre:

Du graphique on remarque que:

Si $x \to 2$ alors $f(x) \to -4$

C'est-à-dire que $\lim_{x \to 2} (2 - 3x) = -4$

À partir d'une étude numérique: on construit le tableau des valeurs de $f(x)$ en choisissant des valeurs proche du nombre 2 du côté droit ou du côté gauche comme suivant:

x	2.1	2.01	2.001	⟶	2	⟵	1.999	1.99	1.9
$f(x)$	-4.3	-4.03	-4.003	⟶	-4	⟵	- 3.997	- 3.97	-3.7

➢ Le tableau montre lorsque x tends vers le nombre 2 du côté droite ou du côté gauche alors les valeurs de $f(x)$ tends vers le nombre -4

Essayez de résoudre

(2) Estimez de chacun de ce qui suit graphiquement et à partir d'une étude numérique:

a $\lim_{x \to 2} (1 - 3x)$ b $\lim_{x \to 0} (x^2 - 2)$



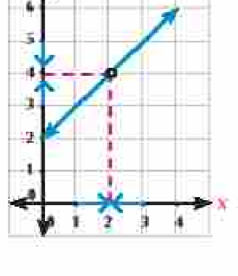
Exemple

Estimation de la limite (La limite n'est pas égale à la valeur de la fonction)

(3) Estimez graphiquement et à partir d'une étude numérique $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.



Solution



Graphiquement: La représentation graphique ci-contre de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ où $x \neq 2$.

Montre que Si $x \to 2$ alors $f(x) \to 4$ Donc: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

À partir d'une étude numérique: on construit le tableau des valeurs de $f(x)$ en choisissant des valeurs procher du nombre 2 du côté droite ou du côté gauche comme suivant.

x	2.1	2.01	2.001	⟶	2	⟵	1.999	1.99	1.9
$f(x)$	4.1	4.01	4.001	⟶	4	⟵	3.999	3.99	39

➢ Le tableau montre lorsque x tends vers le nombre 2 du côté droite ou du côté gauche alors les valeurs de $f(x)$ tends vers le nombre 4

Dans cet exemple, on remarque:

1- Le rond vide dans la représentation graphique veut dire qu'on a une forme indéterminée $(\frac{0}{0})$, si $x = 2$

2- L'existence d'une limite de la fonction si x ⟶ 2 ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en x = 2 où $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Cette remarque montre une notion importante en limites

Essayez de résoudre

3 Estimez la limite chacun de ce qui suit graphiquement et à partir d'une étude numérique:

a $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ **b** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ **c** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Utilisation de la technologie pour déterminer la limite d'une fonction en un point



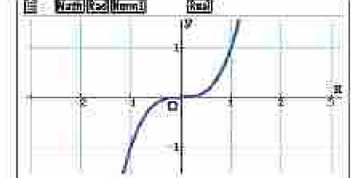
Dans chacun des cas suivants, utilisez une calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f puis estimez la limite de la fonction aux points indiqués.

1) $f(x) = x^3$ si $x \longrightarrow 0$

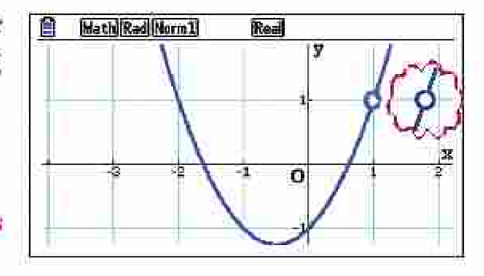
2) $f(x) = (\frac{x^3 - 1}{x - 1}) - 2$ si $x \longrightarrow 1$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \longrightarrow 0$ où x est mesuré en radians.

On peut utiliser une calculatrice de graphisme ou un logiciel (*Geogebra*) **pour tracer la courbe représentative de la fonction comme suivant:**



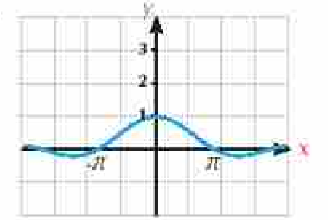
1) En utilisant la calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f, telle que $f(x) = x^3$ du graphique $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$



2) En utilisant la calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f, telle que $f(x) = (\frac{x^3 - 1}{x - 1}) - 2$

du graphique $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Remarquez le rand vide au point de'coordonnees (1 , 1))



3) En utilisant la calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f, telle que:

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

du graphique $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

On déduit de l'activité précédente que :

L'existence d'une limite de la fonction si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = a$

Pensé critique: Si la fonction f est définie en $x = a$ cela signifie que la fonction admet une limite en a? Justifiez votre réponse.

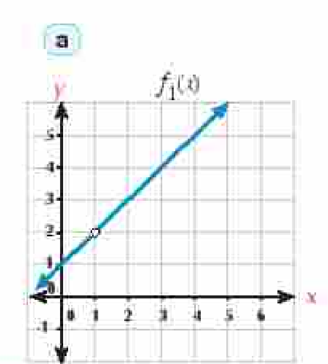
Exercice sur l'activité: Utilisez une calculatrice de graphisme pour tracer la courbe représentative de la fonction f puis estimez la limite de la fonction aux points indiqués.

a $\lim\limits_{x \to 0} (2 - x^2)$ **b** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ **c** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ où x est mesure' en radians

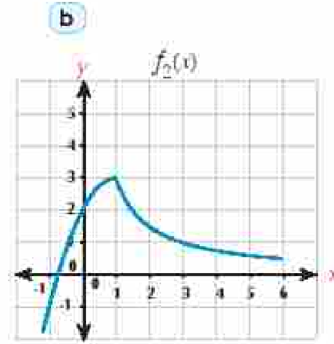
 **Exercices 3 - 1** 

1 Estimez la limite de chacune de fonctions suivantes si $x \longrightarrow 1$

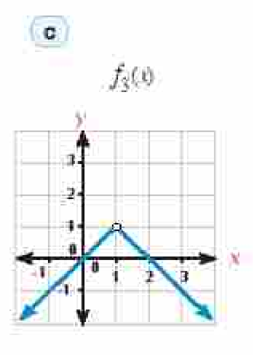
a



b

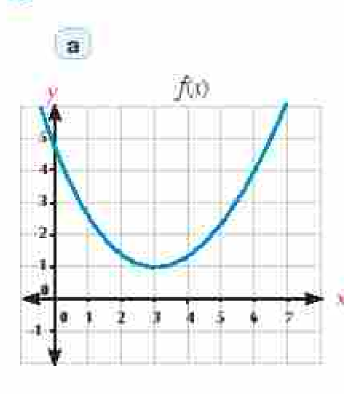


c



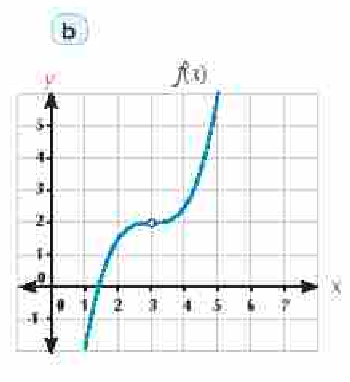
2 Estimez la limite de chacun de fonctions suivantes au point indiqué.

a



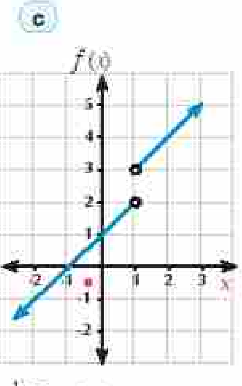
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ ....

b



$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ ....

c

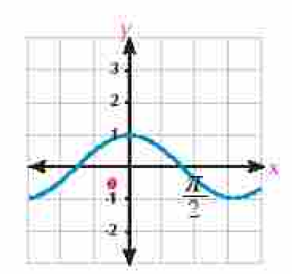


$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ ....

3 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez

a $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

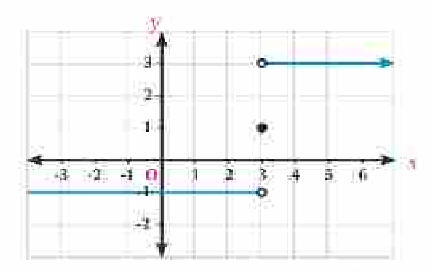
b $f(0)$

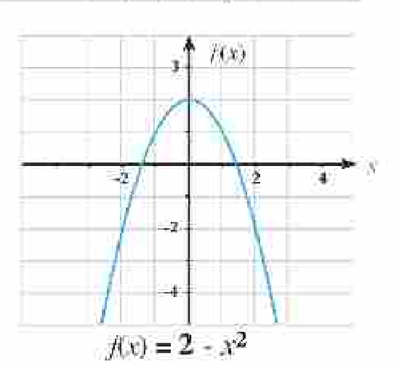


4 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez:

a $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

b $f(3)$





5 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b $f(-2)$

c $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

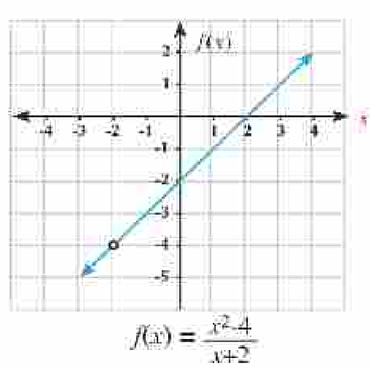
d $f(0)$

6 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $\lim\limits_{x \to 0} (2 - x^2)$

b $f(0)$

$f(x) = 2 - x^2$



7 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

b $f(-2)$

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

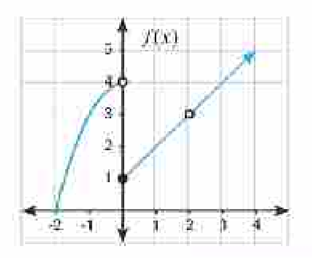
8 Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a $f(0)$

b $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c $f(2)$

d $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



9 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ où $f(x) = 5x + 4$

x	1.9	1.99	1.999	⟵	2	⟶	2.001	2.01	2.1
$f(x)$					?				

10 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 1)$

x	- 0.9	- 0.99	- 0.999	⟵	- 1	⟶	- 1.001	- 1.01	- 1.1
$f(x)$					?				

11 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

x	- 0.9	- 0.99	- 0.999	⟵	- 1	⟶	- 1.001	- 1.01	- 1.1
$f(x)$					?				

12 Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1.9	1.99	1.999	⟵	2	⟶	2.001	2.01	2.1
$f(x)$					?				

13 Utilisez une calculatrice de graphisme ou un logiciel du graphique pour tracer la courbe représentative de la fonction f puis estimez la limite de la fonction ensuite vérifiez votre solution en utilisant les points indiqués.

a $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 4)$

b $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4)$

c $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

d $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2}$

e $\lim\limits_{x \to 0} (x + \sin x)$

f $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x}$

g $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

h $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|}$

Déterminé la limite d'une fonction algébriquement

Unité (3)

3 - 2

On a déjà étudié comment déterminer la limite d'une fonction en $x = a$ graphiquement et à partir de l'étude de quelques valeur de la fonction. Dans ce qui suit nous allons présenter quelques théorèmes et résultat pour déterminer la limite d'une fonction sans parcourir aux tableaux du calcule.

Allez apprendre

- Limite d'une fonction polynôme.
- Quelques théorèmes des limites.
- Utilisation de la division euclidienne pour trouvez la limite d'une fonction .
- Utiliser le théorème $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\,a^{n-1}$

Vocabulaires de base



- Limite d'une fonction
- fonction polynôme
- Substitution directe
- Factorisation
- Division composée
- Conjugué

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



Activité

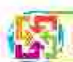
Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter graphiquement chacune des deux fonctions:

$f_1(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, $f_2(x) = x + 1$

Que remarquez-vous?

Calculez: $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x)$

Que pouvez-vous déduire?



A apprendre

Limite d'une fonction polynôme:



Theorem 1

➢ **Si** $f(x)$ est une fonction polynôme et $a \in \mathbb{R}$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$



Exemple

Par substitution directe

1) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (-4)$

Solution

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5) = 4 - 6 + 5 = 3$

(Par substitution directe)

b) $\lim\limits_{x \to 3} (-4) = -4$ On remarque que

$f(x) = -4$ **(constante) pour tout** $x \in \mathbb{R}$



Rappel

une fonction est appelée polynôme, si elle est à la forme
$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$

Où: $n \in \mathbb{N}$,
$c_n \neq 0$,
$c_0, c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$

Essayez de résoudre

1) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes

a) $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 + x - 4)$ c) $\lim\limits_{x \to -2} (7)$

Théorème 2

➢ **Si** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ **alors:**

1- $\lim\limits_{x \to a} c\, f(x) = c\, \ell$ si $k \in \mathbb{R}$

2- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$

3- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \ell\, m$

4- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$ où $m \neq 0$

5- $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \ell^n$ si $\ell^n \in \mathbb{R}$

Exemple **Utilisation du théorème**

2) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x + 7}{x^2 + 2x - 5}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} (\sqrt{4x^2 - 3})$

Solution

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x + 7}{x^2 + 2x - 5} = \dfrac{\lim\limits_{x \to -1} (3x + 7)}{\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x - 5)} = \dfrac{3 \times -1 + 7}{(-1)^2 + 2\,(-1) - 5} = \dfrac{4}{-6} = \dfrac{-2}{3}$

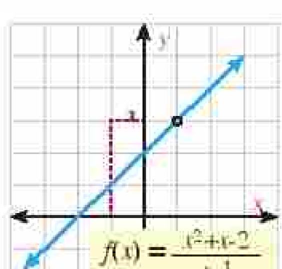
b) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -2} (4x^2 - 3)} = \sqrt{4(-2)^2 - 3} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$

Essayez de résoudrev

2) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3}{2x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{2x^2 + 1}$

Détermination de la limite d'une fonction dans les cas des formes indéterminées:



Pour trouver $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ en utilisation la substitution directe, on trouve $\dfrac{0}{0}$, qui est une forme indéterminée. La figure ci-contre est une représentation graphique de la fonction f, on trouve que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

C'est pour cela qu'on cherche une autre fonction équivalente, soit $g(x)$ en divisant par les facteurs commun non nuls au numérateur et au dénominateur

Theorem 3

➢ Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$

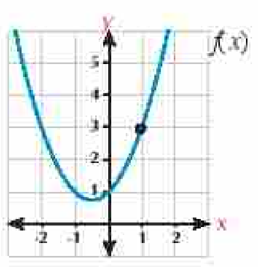
and if $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, **alors** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$



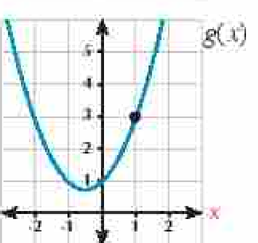
Exemple **Utilisation de la factorisation**

3 Utilisez la factorisation pour trouver les limites suivantes

a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ **b** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + x - 2}$



$f(x)$



$g(x)$

Solution

a On remarque que $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ est indéterminée en $x = 1$

En factorisant puis on divise par les facteurs communs non nuls, nous pouvons écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = x^2 + x + 1 = g(x)$$

De ce qui précède, on trouve que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 1$

Comme $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$

Et d'après le **théorème 3** , $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

On déduit que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$



Méthode de la division Euclidienne

b On remarque que pour $x = 1$, la fonction du numérateur est $f(x) = 0$ et la fonction du numérateur est $g(x) = 0$. Cela signifie que $(x - 1)$ est un facteur commun du numérateur et du dénominateur. Vu la difficulté de factoriser la fonction du numérateur en deux facteurs dont l'un est $(x - 1)$, on utilise la méthode de la division euclidienne pour Trouvez l'autre facteur de l'expression $x^3 - 2x^2 + 1$ comme suit:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 \qquad + 1 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - x - 1 \\ \hline 0 - x^2 \qquad + 1 & \\ \quad - x^2 + x & \\ \hline 0 - x + 1 & \\ \quad - x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



Conseil pour la solution

Dans la division euclidenne:
(1) On range le dividende et le diviseur soit dans l'ordre croissant ou dans l'ordre décroissant.
(2) On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur et on écrit le résultat.
(3) On multiplie le résultat par le diviseur puis on retranche le produit du dividende pour obtenir le reste.
(4) On répète le même processus jusqu à la fin de la division .

Nous pouvons utiliser une méthode simple pour effectuer la division. Cette méthode est appelée la division composée:

On utilise dans cette méthode, les coefficients des polynômes comme suivant

Etape 1: On écrit les coefficients du dividende dans l'ordre décroissant puis on égalise le diviseur par zéro pour obtenir la valeur de x comme l'indique la figure ci-contre.

Valeur de x 1	1	0	-2	1	← cofficient

Etape 2: On multiplie le premier coefficient par la valeur obtenue de x et on écrit le produit en dessous du deuxième facteur puis on additionne.

1	1	0	-2	1
		1		↓
		-1	1	

Etape 3: On répète les opérations en étape 2 les coefficients du quotient sont 1 , − 1 et − 1 respectivement.

1	1	0	-2	1
		1	-1	-1
	0	-1	-1	1

Donc le quotient est $x^2 - x - 1$

On obtient donc $x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1)$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2-x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-x-1}{x+2} = -\dfrac{1}{3}$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x-8}{x^2-x-12}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-x^2-5x+6}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3-10x-3}{x^2+2x-3}$

Exemple **Utilisation du conjugué**

(4) Calculez les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3}$

Solution

a) On remarque que : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$ est une quantité indéterminée $x = 4$

On cherche une méthode pour se débarrasser du facteur $(x - 4)$ existant au numérateur et au dénominateur

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} \times \frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1} = \lim_{x \to 4} \frac{x-3-1}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} = \frac{1}{2}$$

b $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x}{\sqrt{x+4} - 3} \times \dfrac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x+4} + 3}$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x(x-5)(\sqrt{x+4} + 3)}{x+4-9} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x(x-5)(\sqrt{x+4} + 3)}{(x-5)}$

$= \lim\limits_{x\to 5} x(\sqrt{x+4} + 3) = 5(3+3) = 30$



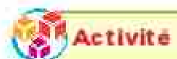
Essayez de résoudre

4) Calculez les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$ **b** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5} - 2}$

Théorème 4

Soit la fonction f tel que $f(x) = \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n\,a^{n-1}$



Activité

A l'aide de votre professeur, démontrez théorème 4



Exemple

Déterminé la limite d'une fonction en un point en utilisant théorème (4)

5) Déterminez $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}$

Solution

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 4^3}{x - 3} = 4(3)^3 = 108$



Corollaires

Corollaires issus du théorème (4):

1- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+a)^n - a^n}{x} = n\,a^{n-1}$ **2-** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \dfrac{n}{m} a^{n-m}$



Exemple

6) Calculez

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+5)^4 - 625}{x}$ **b** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$

c $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-4)^5 + 32}{x-2}$ **d** $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x^5} - 32}{\sqrt{x^3} - 64}$

Solution

a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+5)^4 - 5^4}{x} = 4 \times 5^3 = 500$

b $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5 - 2^5}{x^2 - 2^2} = \dfrac{5}{2} \times 2^3 = 20$

c $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-4)^5 + 32}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-4)^5 - (-2)^5}{(x-4) - (-2)}$

$= 5\,(-2)^4 = 80$

d $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x^5} - 32}{\sqrt{x^3} - 64} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x^{\frac{5}{4}} - (16)^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}}$

$= \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} \times (16^{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}}) = \dfrac{5}{6} \times 16^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{12}$

Remarque

$16^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^{4 \times \frac{5}{4}}$
$= 2^5 = 32$
Donc :
$16^{\frac{3}{2}} = 64$

Essayez de résoudre

5 Calculez:

a $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^4 - 625}{x+5}$ **b** $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x^7} - 128}{x-16}$ **c** $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt[5]{x+25} - 2}{x-7}$

Réflexion créative:

si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^n - 64}{x-2} = k$ **Quel est la valeur de n et celle de k :**



Exercices 3 - 2



Complétez ce qui suit:

1. $\lim\limits_{x\to 2} (3x - 1) =$ ....
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x+1} =$ ....
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{x} =$ ....
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x-2} =$ ....
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^5 - a^5}{x-a} =$ ....
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2} =$ ....
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x^3} - 1}{x^4 - 1} =$ ....
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{-1} - 2^{-1}}{x^{-3} - 2^{-3}} =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 1}{x+1}$ est égale à:

a -3 **b** -2 **c** 3 **d** La fonction n'a pas de limite

(10) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$ est égale à:

a 1 b $\frac{\pi}{2}$ c $\frac{2}{\pi}$ d La fonction n'a pas de limite

(11) $\lim\limits_{x \to 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 16}$ est égale à:

a zero b $\frac{1}{2}$ c 1 d La fonction n'a pas de limite

(12) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x}$ est égale à:

a 0 b 1 c $\frac{4}{\pi}$ d La fonction n'a pas de limite

(13) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27}$ est égale à:

a 0 b $\frac{5}{3}$ c 15 d 9

(14) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4a}{x - 2}$ exists then a equals:

a -1 b 1 c 2 d 4

(15) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5}{(x - 2)^3}$ est égale à:

a $-\frac{5}{2}$ b 0 c 5 d La fonction n'a pas de limite

Trouver les limites suivantes si elles existent:

(16) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2)$

(17) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

(18) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2x - \sin x)$

(19) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos 2x}{x}$

(20) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^3 + 1}$

(21) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{9 - x}{x^2 - 81}$

(22) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x}$

(23) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

(24) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x + \sqrt{x} - 12}{x - 9}$

(25) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2}}{x}$

(26) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^4 - 16}$

(27) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2}{x} + \frac{x^2 - x}{x - 1}\right)$

(28) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 12x + 4}{x^3 - 4x}$

(29) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{2x^2 - 7x - 4}$

(30) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 2x^2 + 2x - 15}$

(31) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$

(32) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^8 - (16)^2}{x - 2}$

(33) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

(34) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^{-9} - \frac{1}{512}}{x - 2}$

(35) $\lim\limits_{x \to \sqrt{5}} \frac{x^7 - 125\sqrt{5}}{x^4 - 25}$

(36) $\lim\limits_{x \to 81} \frac{\sqrt[4]{x} - 3}{x - 81}$

(37) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^7 - 128}{x^5 - 32}$ (38) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{(x - 5)^7 - 1}{x - 6}$ (39) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt[5]{x + 25} - 2}{x - 7}$

(40) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 3)^6 - 1}{x - 2}$ (41) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - 2h)^{17} - x^{17}}{51\, h}$ (42) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^4 - 81}{x^5 + 243}$

(43) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^4 - 81}{6\, h}$ (44) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}$ (45) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x + 7} - 2}{x + 3}$

(46) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x + 6} - 3}$ (47) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ (48) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x - 1)^2 - 1}{5x}$

(49) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{3}{x^3 - 1}\right)$ (50) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$ (51) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 3}{x - 4}$



Activité

(52) **En Lien avec le volume.** On utilise un papier cartonné sous forme carrée de longueur de côté 24 cm pour fabriquer une boîte sans couvercle en découpant quatre carrés de ses quatre coins. Si la longueur du côté de chaque carré découpé est x cm:

1) Dessinez une figure illustrative de la boîte.

2) Démontrez que le volume de la boîte est donné par la relation $V = x(24 - 2x)^2$

3) Trouver le volume de la boîte si $x = 4$ en étudiant les valeurs de la fonction quand $x \to 4$ à l'aide du tableau suivant:

x	3	3.5	3.9	→	4	→	4.1	4.5	5
$f(x)$	......	......	......	→	......	→	......	......	......

4) Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter la relation puis vérifiez que la valeur maximale du volume est réalisée pour $x = 4$

Réflexion critique :

(53) Si $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ **calculez :** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

(54) Si $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$ **calculez :**

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

(55) **En lien avec le commerce:** Une société trouve si elle dépense x livres égyptiennes pour la publicité de sa production, alors le bénéfice est donné par la relation $f(x) = 0.2\, x^2 + 40\, x + 150$. Trouvez le bénéfice de la société si la dépense pour la publicité tend vers 100 livres égyptiennes.

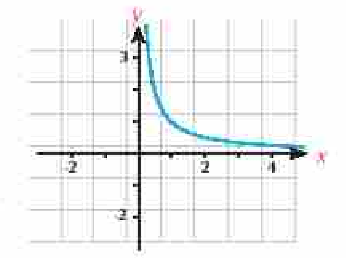
Limite d'une fonction à l'infini

3 - 3

Dans beaucoup d'applications pratiques et de la vie quotidienne, nous avons besoin de connaitre le comportement d'une fonction f quand $x \longrightarrow +\infty$. L'activité suivante illustre cette situation.



Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter la fonction f telle que :
$f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$



Que se passe-t-il dans la courbe de la fonction quand les valeurs de $x \longrightarrow +\infty$ augmentent et tendent vers l'infini.

- De la représentation graphique, on remarque que lorsque x s'approche de l'infini, la valeur de $f(x)$ s'approche de zéro. Pour cela, on dit que quand x tend vers l'infini, $f(x)$ tend vers un nombre déterminé.

Complétez le tableau suivant pour découvrir ce nombre $f(x)$

x	10	100	1000	10000	100000	$x \to +\infty$
$f(x)$	0.1	0.01				$x \to ?$



Limite d'une fonction à l'infini

De l'activité précédent, on trouve que si les valeurs de x augmentent tendant vers l'infini les valeurs de $f(x)$ tendent vers 0.



Theorem 1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Corollary

$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ où $n \in \mathbb{R}^+$, a est un constant

Formules de base :

- $\lim_{x \to +\infty} c = c$ où c est constant
- Si n est un nombre entier positif, alors $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Remarquez que: le théorème (2) déjà étudié dans la leçon précédente, concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions lorsque $x \to a$ est vrai aussi quand $x \to +\infty$

Allez apprendre

- Limite d'une fonction à l'infini.
- Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution algébrique.
- Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution graphique.

Vocabulaires de base



- Limite d'une fonction à l'infini

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

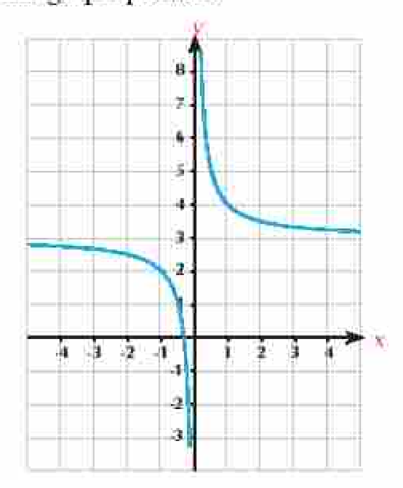


Exemple

1 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 3)$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - \frac{3}{x^2})$

➢ **En utilisant un logiciel de graphisme, vérifiez le résultat graphiquement.**

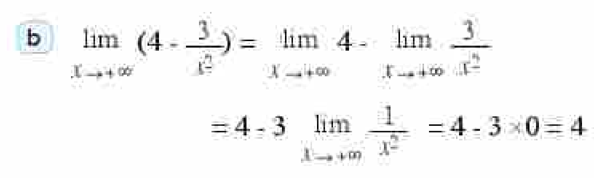


Solution

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} 3$

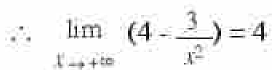
$= 0 + 3 = 3$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 3) = 3$

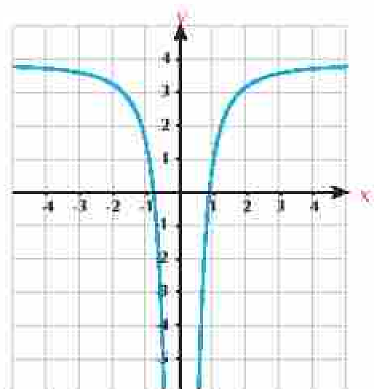


b $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - \frac{3}{x^2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2}$

$= 4 - 3 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 4 - 3 \times 0 = 4$



$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} (4 - \frac{3}{x^2}) = 4$



Essayez de résoudre

1 Calculez:

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{5}{x} + 2)$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{2}{x^2} + 5)$

Exemple



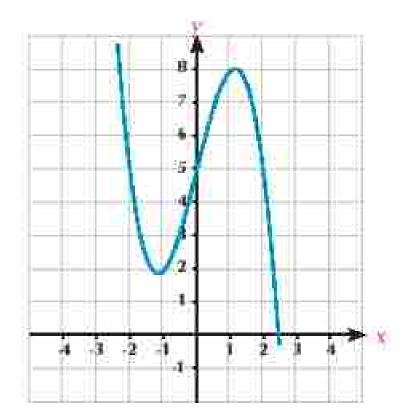
2 Calculez: $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x - x^3 + 5)$

Solution

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 (\frac{4}{x^2} - 1 + \frac{5}{x^3})$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \times \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{4}{x^2} - 1 + \frac{5}{x^3})$

$= +\infty \times -1 = -\infty$



Essayez de résoudre

2 Calculez les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 7x^2 + 2)$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - 3x - x^3)$



Exemple

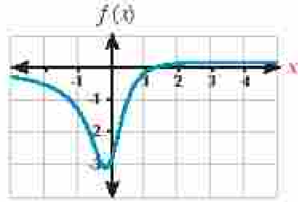
3 Calculez les limites suivantes :

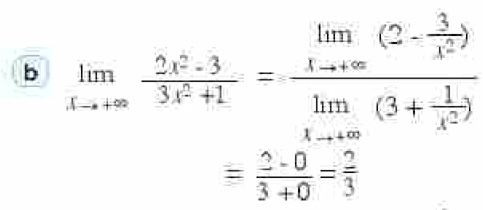
a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{3x^2 + 1}$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3}{3x^2 + 1}$ **c** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 3}{3x^2 + 1}$

Solution

Dans tous les cas, on divise le numérateur et le dénominateur par x^2 (la plus grande puissance existante au dénominateur).

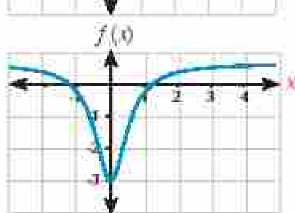
a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{3x^2 + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{0 - 0}{3 + 0} = 0$

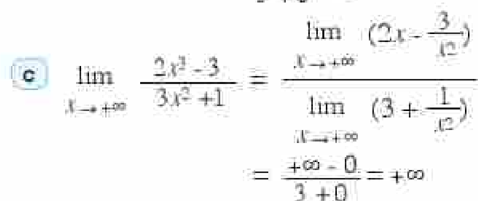




b $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3}{3x^2 + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}$

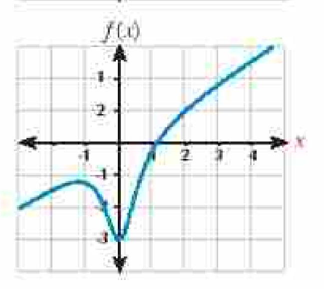
$= \dfrac{2 - 0}{3 + 0} = \dfrac{2}{3}$





c $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 3}{3x^2 + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}$

$= \dfrac{+\infty - 0}{3 + 0} = +\infty$



De l'exemple précédent, on déduit que le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions polynômes :

- La limite est un nombre réel différent de zéro si le degré du numérateur = le degré du dénominateur.
- La limite est égale à zéro si le degré du numérateur < degré du dénominateur.
- La limite est égale à $\pm\infty$ si le degré du numérateur > degré du dénominateur.

Essayez de résoudre

3 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{2x}$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 5x}{8x^4 + 3x^2 - 2}$ **c** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^2 + 1}{3x^2 + x - 2}$



Exemple

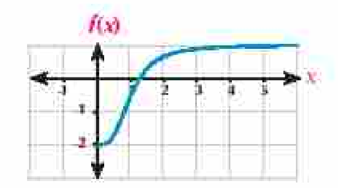
4 Calculez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$

Solution

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$



$f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$

$\because x \longrightarrow +\infty$

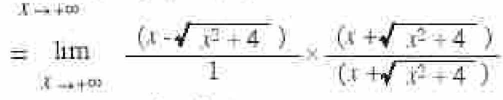
$\therefore x > 0$ **d'où** $|x| = x$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{x^3 + 1}$

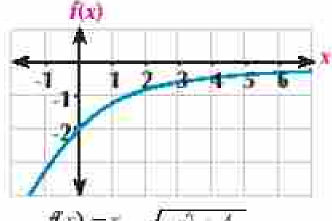
En divisant le numérateur et le dénominateur par x^3

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{x^3})}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$



$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 4})}{1} \times \frac{(x + \sqrt{x^2 + 4})}{(x + \sqrt{x^2 + 4})}$$



$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$\because x \longrightarrow +\infty$

$\therefore x > 0 \longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $x = \sqrt{x^2}$

$$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}})} = \frac{0}{1 + 1} = 0$$

Essayez de résoudre

4 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 5x} - \sqrt{3}\, x)$



Exercices 3 - 3



Complétez ce qui suit :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{3}{x}) =$ ....

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{3}{x^2} - 2) =$ ....

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-7) =$ ....

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3) =$ ....

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x}$ ....

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5}{x^2+1} =$ ....

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+3}{x^3-5} =$ ....

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} =$ ....

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2}) =$ ....

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x}{2x+3}$ est égale à

   a) 0 b) 2 c) 3 d) $+\infty$

12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4}{x}+1}$ est égale à

   a) 0 b) 1 c) 2 d) $+\infty$

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+3}{2-x^2}$ est égale à

   a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $+\infty$

14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{2x-1}$ est égale à

   a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $+\infty$

15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1+x}{4x-1}}$ est égale à

   a) -1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

Trouvez les limites suivantes:

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2}$

17. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 5x^2 + 1)$

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-7x}{2+3x}$

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+3}$

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2+3}$

21. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5-6x-3x^2}{2x^2+x+4}$

(22) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 4x + 1}$

(23) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{3x^2 + 4x - 1}$

(24) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{4x^3 - 5x - 1}$

(25) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 6}{(x - 1)^2}$

(26) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + \dfrac{2x^2}{(x + 3)^2})$

(27) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{5x}{2 + x})$

(28) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{x}{2x+1} + \dfrac{3x^2}{(x-3)^2})$

(29) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{4 + x^2}}$

(30) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 4x + 5}{(2x - 1)^3}$

(31) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x)$

(32) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{5x^2 + 4x + 7} - \sqrt{5x^2 + x + 3})$

(33) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)$

(34) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}$

(35) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$

(36) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x + 2)^3(3 - 2x^2)}{3x(x^2 + 7)^2}$

(37) Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{ax^2 + 3bx + 5} - 2x) = 3$. Trouvez la valeur de a et celle de b.

(38) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{-1} + 3x^{-2} + 5}{2x^{-2} - x^{-3} + 1}$

(39) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^{-1} - 3x^{-2} + x^{-3}}{4x^{-3} + x^{-1}}$

(40) **Réflexion créative**: Une entreprise produit des cartes de vœux. Le coût fixe d'une production s'élève à 5000 Livres. De plus, se rajoute une demie Livres par toute carte produite. Le coût total de la production est $S = \frac{1}{2}x + 5000$ où est x le nombre de cartes produites.

Trouvez :

(1) Le coût de la production d'une carte si l'entreprise produit :

(a) 10000 cartes (b) 100000 cartes

(2) Le coût de la production d'une carte si l'entreprise produit une infinité de cartes.

Limite des fonctions trigonométriques

Unité (3)

3 - 4



Activité

Soit f un fonction telle que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, on veut étudier les valeuss de x lorsque $x \to 0$ ou x est mesuré en radian.

on construit un tableau pour étudier le comportement de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0.

x	1	0.01	0.001	→	0	→	0.001	-0.01	10
$\frac{\sin x}{x}$	0.8415	0.9983	......	→	......	→	......	0.9983	0.8415

Du tableau précédent, on déduit $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$



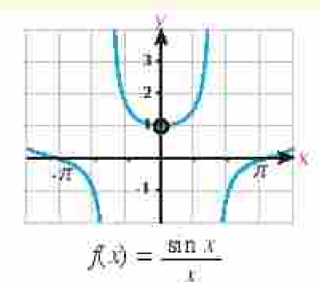
A apprendre



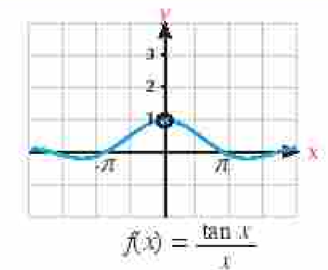
Theorem 1

Si x est la mesure d'un angle en radians, alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$



$f(x) = \frac{\tan x}{x}$

Expression orale:

Si x est la mesure d'un angle en degrés, peut-on trouvez $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$? Justifiez votre réponse.

Corollaire 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin a x}{x} = a, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan a x}{x} = a$$



Allez apprendre

- Limite de la fonction sinus.
- Limite de la fonction tangente.



Vocabulaires de base

- Fonctions trigonométriques.
- Limite d'une fonction trigonométrique

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



Enrichissez votre connaissance

Il y a plusieurs démonstration pour ce théorème. Voir la connection: http://math.stackexchange.com/question/75130



Exemple

(1) **a** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = 3$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{7x} = \dfrac{1}{7} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{x} = \dfrac{2}{7}$

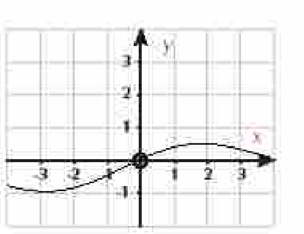
c $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x \cos 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} \times \lim\limits_{x \to 0} \cos 2x = 5 \times 1 = 5$

Essayez de résoudre

(1) Trouvez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x}{5x}$ **c** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{1 - x}$

Corollaire 2



a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = \text{zero}$

➤ **A l'aide de votre professeur démontre corollaire (2)**

Exemple

(2) Trouvez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\tan x}$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

Solution

a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} \times \dfrac{x}{\tan x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} \times \dfrac{x}{\tan x} = 0 \times 1 = 0$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \times \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} = (1)^2 \times \dfrac{1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$



$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Essayez de résoudre

(2) Trouvez les limites suivantes:

a $\lim\limits_{x \to 0} 6x^2 \csc 2x \cot x$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin 2x}$



Exemple

(3) Trouvez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x + 3\sin x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + x\sin x}{\sin x \cos x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2}$

Solution

a) $= \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \left(x - 1 + \frac{\sin x}{x}\right)$

$= \frac{1}{2} (0 - 1 + 1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + x\cos x}{\sin x \cos x}$

Divisant le numérateur et la dénominateur

par $x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\frac{\sin x}{x} \times \cos x}$

$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \cos x}$

$= \frac{1 + \cos 0}{1 \times \cos 0} = \frac{1 + 1}{1} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$

Pasant $1 - \cos x = y$

Lorsque $x \longrightarrow 0$ alors $y \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2}$

$= \frac{1}{5} \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}\right)^2$

$= \frac{1}{5} \times (3)^2$

$= \frac{9}{5}$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x^2 - 4x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x\sin 2x + \sin^2 2x}{\tan^2 3x + x^2}$



Exercices 3 - 4



Complétez ce qui suit:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \cos 3x =$ ....

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 2x =$ ....

3. $\lim\limits_{x \to 0} \tan x =$ ....

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{x} =$ ....

5. $\lim\limits_{x \to 0} \tan \frac{3x}{4x} =$ ....

6. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sin (x - 5)}{3(x - 5)} =$ ....

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \pi x}{2x} =$ ....

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} =$ ....

9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 + 2x}{\cos 4x} =$ ....

10. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x} =$ ....

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 3x} =$ ....

12. $\lim\limits_{x \to 0} 3x \csc 2x =$ ....

13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{3x^2} =$ ....

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x \tan 3x}{4x^2} =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

15. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ est égale à ....

    a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 3

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{5x}$ est égale à ....

    a) 0 b) $\frac{4}{5}$ c) 1 d) $\frac{5}{4}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + 3\tan x}{5x}$ est égale à ....

    a) 1 b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{6}{5}$ d) 2

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^2 2x}{x \sin 3x}$ est égale à ....

    a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{3}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\sin \frac{3}{4}x}$ est égale à ....

    a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ est égale à .... où x est mesuré en système degré

    a) 1 b) $\frac{\pi}{180}$ c) $\frac{180}{\pi}$ d) π

Trouvez les limites suivantes:

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{5x}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3(1-\cos x)}{x}$

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^2}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x \tan x}{x}$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x^2}$

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos^2 x)}{x^2}$

30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$

31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x\cos x}{\sin^2 3x}$

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$

33. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x \cos(-2x+1)}{x^2 + x}$

34. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3\sin x}{x}$

35. $\lim\limits_{x \to -0} (1 + \cos x) \times \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

36. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x^2 + \sin^2 5x}{x^2}$

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x^3 + \sin^3 5x}{2x^3}$

38. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x^2 + \sin 3x}{2x^2 + \tan 6x}\right)^4$

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 + x\sin 5x}{x^2 - \tan 3x^2}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x}$

41. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x + 5\sin 3x}{2\sin 3x - \tan 5x}$

42. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \tan 2x}{x^2 + \sin^2 3x}$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{\cos^2 2x - 1}$

44. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \cos 3x - \cos 4x}{x}$

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x^2 + \sin^2 5x}{x^2}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{\cos^2 5x - 1}$

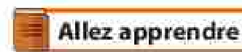
47. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{5\sin x}$

48. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}$

49. $\lim\limits_{x \to 0} x\,(\csc 2x - \cot 3x)$

Unité (3)

3 - 5 Existence de la limite d'une fonction en un point



Allez apprendre

- Limite à gauche.
- Limite à droite.

Vocabulaires de base

- Limite à gauche.
- Limite à droite.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

Figure (1) :

Représente la courbe de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 2 \\ 3 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

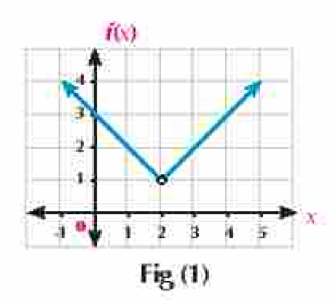


Fig (1)

- **Etudiez** l'existence de $\lim_{x \to 2^+} f(x)$
- **Etudiez** l'existence de $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

Est-ce que $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$?

Figure (2) :

Représente la courbe de la fonction f telle que:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

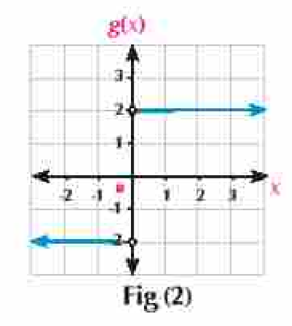


Fig (2)

- **Etudiez** l'existence de $\lim_{x \to 0^-} g(x)$
- **Etudiez** l'existence de $\lim_{x \to 0^+} g(x)$

Est-ce que $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x)$?

A apprendre

Limite à droite et limite à gauche

on dit que la limite d'une fonction f quand x tend vers a est égale à ℓ si et seulement si sa limite à droite et à gauche quand x tend vers a sont égales à ℓ où $\ell \in \mathbb{R}$. Cela s'écrit par :

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si : $f(a^+) = f(a^-) = \ell$

où:

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Exemples illustratifs

a Dans la figure ci-contre, on remarque que:

$f(1^-) = 3$ $\qquad f(1^+) = -1$

$\therefore\ f(1^-) \neq f(1^+)$

$\therefore$ La fonction n'a pas de limite lorsque $x \longrightarrow 1$

Fig (1)

b Dans la figure ci-contre, on remarque que :

$f(-1^-) = 3$ $\qquad f(-1^+) = 3$

$\therefore\ f(-1^-) = f(-1^+) = 3$

$\therefore\ \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$

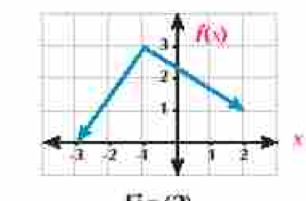
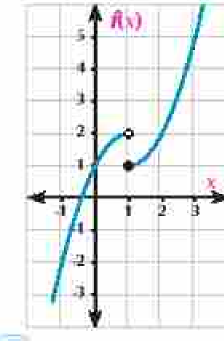
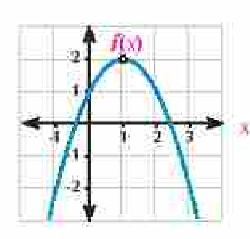


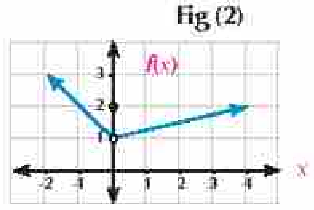
Fig (2)



1 Etudiez les représentations graphiques suivantes pour trouver







a $f(1^-)$	**a** $f(1^-)$	**a** $f(0^-)$
b $f(1^+)$	**b** $f(1^+)$	**b** $f(0^+)$
c $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	**c** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$	**c** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Exemple

1 Trouvez la limite de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x\,|x| - 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{|x|}{x} - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ lorsque $x \longrightarrow 0$

Solution

En redéfinissant la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} x(-x) - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x} - 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{pour tout} \quad x < 0 \\ -1 & \text{pour tout} \quad x > 0 \end{cases}$$

$\because\ f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2 - 1) = -1$

$f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} -1 = -1 \qquad \because\ f(0^-) = f(0^+) = -1 \qquad \therefore\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

Essayez de résoudre

(2) Soit $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$

Trouvez $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (si cela est possible)

Exemple

(2) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{x} & \text{Si } x < 0 \\ \dfrac{x + \tan x}{3x - \sin 2x} & \text{Si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{lorsque } x \to 0$$

Solution

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$$

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + \tan x}{3x - \sin 2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\tan 2x}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \frac{\tan 2x}{x}}{3 - \frac{\sin 2x}{x}}$$

$$= \frac{1 + 1}{3 - 2} = 2$$

$\because f(0^-) = f(0^+) = 2 \qquad \therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

Essayez de résoudre

(3) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f lorsque $x \longrightarrow \pi$ telle que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x - \pi} & \text{si } x > \pi \\ \cos x & \text{si } x < \pi \end{cases}$$

Exemple

(3) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que: $f(x) = \sqrt{x - 1}$ quand $x \longrightarrow 1$

Solution

$\because$ $f(x)$ La fonction f est définie pour $x - 1 > 0$

$\therefore$ l'ensemble de définition de $f(x)$ est $[1 + \infty[$

1

$\because f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \qquad \therefore f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = 0$

$f(1^-)$ n'est pas définie car la fonction n'est pas définie à gauche de 1

$\therefore f(x)$ n'a pas de limite quand $x \longrightarrow 1$

Essayez de résoudre

(4) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{3 - x}$ quand $x \longrightarrow 3$.

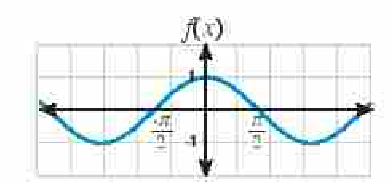


Exercices 3 - 5



Complétez ce qui suit :

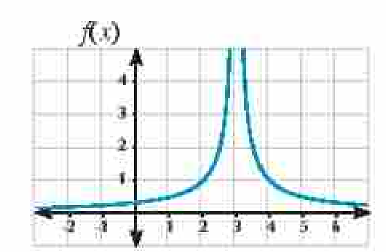
1) Dans la figure ci-contre :



a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ ....

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ ....

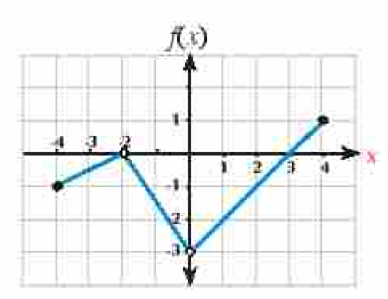
2) Dans la figure ci-contre :



a) $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ ....

b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$ ....

3) Dans la figure ci-contre :



a) $\lim_{x \to -2} f(x) =$ ....

b) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ....

c) $\lim_{x \to -1} f(x) =$ ....

d) $\lim_{x \to -4} f(x) =$ ....

e) $\lim_{x \to 4} f(x) =$ ....

4) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ 2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ .... b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ ....

5) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 0 \\ -3\ x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ .... b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ ....

6) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ .... b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ ....

Etudiez la limite de chacune des fonctions suivantes (si elle existe):

(7) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ où f défini par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(8) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ où f défini telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -3 \\ 3x + 1 & \text{si } x > -3 \end{cases}$

(9) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ où f défini telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < -0 \\ 3x + 1 & \text{si } x > -0 \end{cases}$

(10) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ où f défini telle que $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

(11) Trouvez la valeur de m pour que la fonction f telle que

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & \text{si } x < 1 \\ 6x - 3\text{m} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ admette une limite quand en $x = 1$.

(12) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f quand $f(x)$ $x \longrightarrow \pi$ telle que

soit f une fonction telle que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{\pi - x} & \text{si } x < \pi \\ 1 + \cos x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

(13) Soit $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$ telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3\text{m} & \text{si } x < 2 \\ 5x + \text{k} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Trouvez la valeur de m et k

(14) Trouvez la valeur de k pour que la fonction f admette $f(x) = \begin{cases} x^2 + \text{k} & \text{si } x < -1 \\ x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

une limite en $x = -1$.

(15) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f lorsque $f(x)$ $x \longrightarrow 0$ telle que ,

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x + \tan 2x}{6x + \sin x} & \text{si } x > 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(16) Etudiez l'existence de la limite de la fonction telle que

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\tan x} & \text{si } -\dfrac{\pi}{3} < x < 0 \\ 3\cos x & \text{si } 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

(a) lorsque $x \longrightarrow \dfrac{-\pi}{3}$ (b) lorsque $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$ (c) lorsque $x \longrightarrow 0$

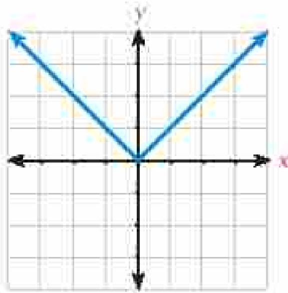
(17) Etudiez l'existence de la limite de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ lorsque $x \to 2$

Continuité

3 - 6

Réfléchissez et discutez

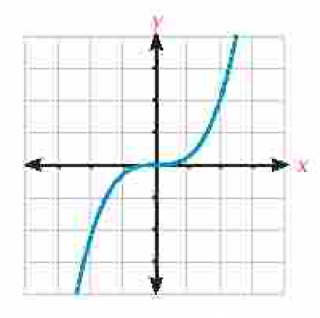
Observez les figures suivantes. Que remarquez-vous?





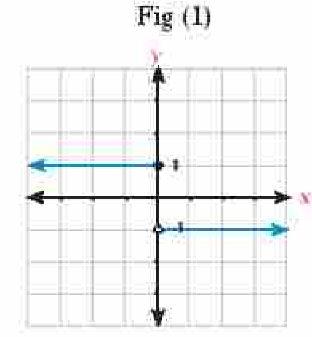
$f_1(x) = |x|$

Fig (1)



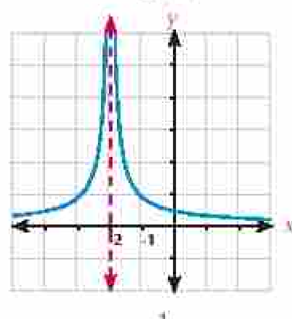
$f_2(x) = 2x^3$

Fig (2)



$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Fig (3)



$f_4(x) = \dfrac{1}{|x+2|}$

Fig (4)

Dans **les figures (1) et (2)**, on remarque que la courbe de chacune des deux fonctions est continue en tout point de son ensemble de définition.

Dans **les figures (3)**, on remarque que la courbe de la fonction est discontinue au point d'abscisse $x =$ ....

Dans **les figures (4)** on remarque que la courbe de la fonction est discontinue au point d'abscisse $x =$ ....

De ce qui précède, on déduit que la fonction f est continue au point d'abscisse $x = a$ si la courbe de la fonction n'est pas coupée en ce point et la fonction f est discontinue au point d'abscisse $x = a$ si la courbe de la fonction est coupée en ce point.

Allez apprendre

- Continuité d'une fonction en un point.
- Continuité d'une fonction sur un intervalle.

Vocabulaires de base



- Continuité d'une fonction
- Continuité en un point
- Continuité d'une fonction sur un intervalle

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Continuité d'une fonction en un point:

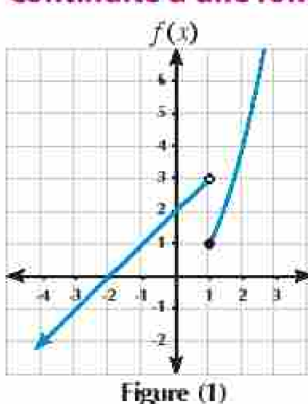


Figure (1)

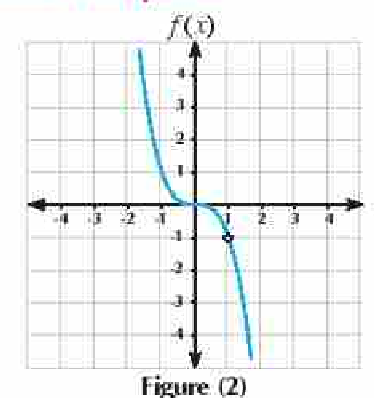


Figure (2)

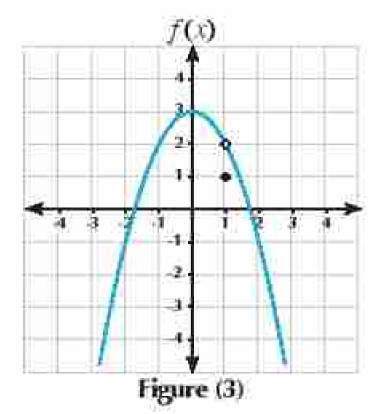


Figure (3)

Observez les figures précédentes puis calculez $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ et $f(1)$ s'ils existent.

Dans la figure (1) : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$ si $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 3$ **donc** $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ n'existe pas tandis que $f(1) = 1$

Dans la figure (2) : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -1$ si $\lim\limits_{x\to1^-} (x) = -1$ **donc** $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -1$, $f(1)$ est indéfinie.

Dans la figure (3) : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$ si $\lim\limits_{x\to1^-} (x) = 2$ **donc** $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$ tandis que $f(1) = 1$

C'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to1} f(x) \neq f(1)$

On voit que la fonction f dans les trois figures précédentes est discontinue en $x = 1$

A partir des observations précédentes, essayez de déduire une définition de la continuité d'une fonction en un point.



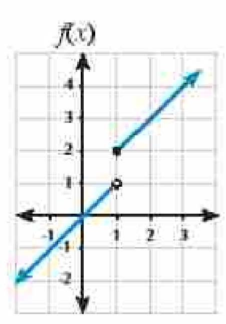
Une fonction f est continue en $x = a$ si elle vérifie simultanément les conditions suivantes

- ➤ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe
- ➤ $f(a)$ existe
- ➤ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exemple Continuité d'une fonction en un point

(1) Etudiez la continuité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(a) en $x = 0$ (b) en $x = 1$



Solution

(a) Etudiez la Continuité de la fonction en $x = 0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} x = 0$,

$f(0) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$

Alors la fonction est continue en $x = 0$

b Etude de la continuité de la fonction en $x = 1$

On remarque que la règle de la définition de la fonction à droite du point $x = 1$ est différente de celle de gauche. Pour cela, on cherche de l'existence d'une limite à droite et d'une limite à gauche en $x = 1$

$f(1^+) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$, $f(1^-) = \lim_{x \to 1} x = 1$

Cela veut dire que: $f(1^+) \neq f(1^-)$ est consition suffisante pour que f ne soit pas continue en $x = 1$ La figure indique la non continuite de f en $x = 1$

Essayez de résoudre

(1) Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est continue en $x = 1$

Exemple **Vérifie la continuité d'une fonction en un point**

(2) Etudiez la continuité de chacune des fonctions définies ci-après au point donné:

a $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ en $x = 2$, $x = 3$ **b** $f(x) = 5 - |x - 3|$ en $x = 3$

Solution

a **i)** Etude de la continuité de la fonction en $x = 2$

$\because$ l'ensemble de dèfinition $= \mathbb{R} - \{2\}$ $\therefore f(x)$ est indéfinie en $x = 2$

$\therefore f(x)$ n'est pas continue $x = 2$

ii) Etude de la continuité de la fonction en $x = 3$

$\because f(3) = \frac{3+3}{3-2} = 6$ $\because \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = 6$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ $\therefore$ Donc la fonction est continue en $x = 3$

b On redéfinie la fonction $f(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{si } x \geqslant 3 \\ x + 2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$\because f(3) = 5$, $\because f(3^+) = \lim_{x \to 3^+} (8 - x) = 5$, $f(3^-) = \lim_{x \to 3^-} (x + 2) = 5$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 5$ **I.e:** $f(3) = \lim_{x \to 3} f(x)$

$\therefore$ Pour cela, la fonction est continue en $x = 3$

Essayez de résoudre

(2) Etudiez la continuité de chacune des fonctions définies ci-après au point donné:

a $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 1$ et en $x = 2$ **b** $f(x) = 3 - |x - 2|$ en $x = 2$

Redéfinir une fonction pour qu'elle soit continue (si cela est possible)

Exemple

3) Redéfinir la fonction f pour qu'elle soit continue en $x = 3$ (si cela est possible)

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & \text{si } x > 1 \\ 5x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Solution

a) Pour que la fonction f soit continue en $x = 1$ il faut avoir $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+3)$

d'où: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

Donc on peut redéfinir la fonction f pour qu'elle soit con tenue par est

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) Pour que la fonction f soit continue en $x = 1$, il faut avoir $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\therefore f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 2x) = 1 + 2 \times 1 = 3$, $f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (5x - 1) = 5 - 1 = 4$

$\because f(1^-) \neq f(1^+)$ la fonction n'a pas de limite en $x \to 1$

pour cela, on ne peut pas redéfinir la fonction pour qu'elle soit continue en $x = 1$

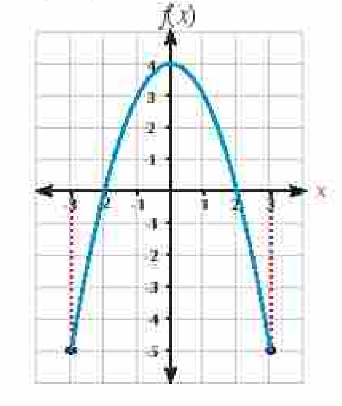
Essayez de résoudre

3) Soit f une fonction telle que $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ Redéfinissez la fonction f pour qu'elle soit continue en $x = 3$ si cela est possible

4) Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$ n'est pas continue en $x = 3$

puis trouver la valeur de h pour que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} & \text{at } x \neq 3 \\ h + 1 & \text{at } x = 3 \end{cases}$ soit continue en $x = 3$

Continuité d'une fonction sur un intervalle



La figure ci-contre représente une fonction f telle que $f(x) = 4 - x^2$ sur l'intervalle $[-3, 3]$. Pour que la fonction f soit continue sur l'intervalle $[-3, 3]$, il faut qu'elle soit continue en tout point de cet intervalle

C'est-à-dire pour tout x $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ pour tout $a \in]-3, 3[$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

De ce qui précède, nous pouvons trouvez la définition suivante:

Definition 2

Soit $f(x)$ une fonction définie sur [a, b] .
La fonction f est continue sur [a, b] Si :
1- $f(x)$ est continue sur]a, b[
2- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

A lide de la definition précédete et les formules des limite on peut montrer quelques fonction continues:

1- Fonction polynôme: est continue sur R ou sur son ensemble de définition.

2- Fonction rationnelle: est continue sur R privé de l'ensemble des zéros de dénominateur.

3- Fonctions sinus et cosinus: sont continue sur R.

4- Fonction tangente: $f(x) = \tan x$ est continue sur $R - \{ x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \}$; $n \in Z$

 **Exemple**

(4) Etudiez la continuité de la fonction f sur [0 ; +∞[telle que

Soit f un fonction $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \cos 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$



$$0 \xrightarrow[\quad \pi \quad]{\sin x - \cos x \qquad\qquad \cos 2x} +\infty$$

$f(x)$ La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; +∞[
Pour étudier la continuite de fonction , on étudie sa continuité:
sur des intervalls précis des son ensemble de définition
aux bornes de ces intervalls
à droite du zéro.

1) $f(x) = \sin x - \cos x$ est continue sur]0 ; π[
De même $f(x) = \cos 2x$ est continue sur]π ; +∞[

2) $f(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1$, $\lim_{x \to 0^+} (\sin x - \cos x) = -1$

Donc: $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ d'où la fonction est continue à droite en $x = 0$

3) On étudie la continuité en $x = \pi$

$f(\pi) = \sin\pi - \cos\pi = 1$

$f(\pi^-) = \lim\limits_{x \to \pi^-} (\sin x - \cos x) = 1$, $f(\pi^+) = \lim\limits_{x \to \pi^+} \cos 2x = 1$

$f(\pi^-) = f(\pi^+)$, $f(\pi) = 1$, $f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi)$

$\therefore$ La fonction est continue en $x = \pi$ De (1) , (2) et (3) la fonction est continue sur $[0, +\infty[$

Essayez de résoudre

(5) Etudiez la continuité de la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple

(5) Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes :

a $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **b** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 4}$

c $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2 - 1}$ **d** $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2 + 1}$

Solution

a $f(x) = x^2 - 3x + 2$ est une fonction polynôme du second degré donc elle est continue sur $\mathbb{R}$

b $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 4}$ est une fonction rationnelle, son ensemble définition $\mathbb{R} - \{-4\}$, les zéros de dénominateur = $\{-4\}$

$\therefore$ Donc la fonction est continue sur $\mathbb{R} - \{-4\}$

c $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2 - 1}$

$\because$ $\sin x$ et $\cos x$ sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction de dénominateur ($x^2 - 1$) est continue sur $\mathbb{R}$ et les zéros de dénominateur $= \{-1 ; 1\}$

$\therefore$ La fonction est continue sur $\mathbb{R} - \{-1 , 1\}$

d $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2 + 4}$

La fonction du numérateur : $\tan x$ est continue sur $\mathbb{R} - \{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

La fonction du dénominateur : $x^2 + 4 > 0$ pour toutes les valeurs de x, il n'existe pas de zéros pour le dénominateur.

C'est-à-dire que la fonction est continue sur $\mathbb{R} - \{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Essayez de résoudre

6) Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$

c) $f(x) = \frac{x^3+1}{\sin x}$

d) $f(x) = (x+1)\cos x$

Remarque

si f_1 et f_2 deux fonction définie sur R, alors:

1- $f_1 \pm f_2$ est continue sur R

2- $f_1 \times f_2$ est continue sur R

3- $\frac{f_1}{f_2}$ est continue sur R - privé de l'ensemble des zéros de dénominateurs.

Activité

7) **En lien avec la chimie**

Dans une expérimentation chimique, le taux de réaction est donné par la fonction g telle que $g(x) = \frac{0.6\,x}{x+12}$ où x est la concentration de la solution.

Cherchez sur les sites internet des expérimentation qui peuvent être représentées par cette fonction.

a) En utilisant un logiciel de graphisme, représentez graphiquement la fonction.

b) Etudiez la continuité de la fonction f.

Exemple

6) Montrez que la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur R.

Solution

Lorsque $x^2 + x + 1$ est positive pour toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$

(Discriminant $= b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$)

Ou $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ Complétant le carrés

$\therefore$ $x^2 + x + 1$ est positive pour toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$

$\therefore f(x) = (\sqrt{x^2+x+1})$ est définie pour toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on trouve que $f(a) = \sqrt{a^2+a+1}$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (\sqrt{x^2+x+1}) = \sqrt{a^2+a+1}$

$\therefore f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

$\therefore f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Essayez de résoudre

8) Etudiez la continuité de la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{x-2}$ sur son ensemble de définition.

 **Exercices 3 - 6** 

Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes aux points d'abscisses donnés :

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\leqslant 1 \\ 3x, & x>1 \end{cases}$ en $x=1$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\leqslant 2 \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$ en $x=2$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x\leqslant 3 \\ x^2-2x-1, & x>3 \end{cases}$ en $x=3$

(4) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-2 \\ 1, & -2\leqslant x<-1 \\ 2x+3, & x\geqslant -1 \end{cases}$ en $x=-2$, en $x=-1$

(5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}, & x<2 \\ 1-\dfrac{3}{x^2}, & x>2 \end{cases}$ en $x=2$

(6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & x>0 \\ 2\sin x, & x\leqslant 0 \end{cases}$ en $x=0$

Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

(7) $f(x)=x^3-2x^2+1$

(8) $f(x)\ \dfrac{-x}{x^2+1}$

(9) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-2x}$

(10) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-2x-15}$

(11) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-2}$

(12) $f(x)=\dfrac{|x+2|}{(x+2)^2}$

(13) $f(x)=\sin x-3\cos(x+1)$

(14) $f(x)=x^2+\cos^2 x$

(15) $f(x)=x^3\sin 2x$

(16) $f(x)=\tan^2 x-1$

(17) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x+\cos x}{x^2-9}$

(18) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x^2-9}$

Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

(19) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\tan x+\sin^2 3x}{5x^2}, & -\dfrac{\pi}{4}<x<0 \\ 2\cos 2x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}[$

(20) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^6-1}{x^3-1}, & -4<x<1 \\ 3x-1, & 1\leqslant x<4 \\ x^2, & 4\leqslant x<6 \end{cases}$ sur l'intervalle $]-4, 6[$

Trouvez la valeur de a dans chacun des cas suivants si :

(21) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+9}$ est continue sur $\mathbb{R}$

22) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^4 - 81}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Trouvez la valeur de b et c dans chacun des cas suivants si :

23) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 + b\,x + c & \text{si } x \in \mathbb{R} -]1\,,3[\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

24) $f(x) = \begin{cases} x + 2b & \text{si } x < -2 \\ 3\,b\,x + c & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x - 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Redéfinissez chacune des fonctions suivantes pour qu'elle soit continue au point donné (si cela est possible) :

25) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

26) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + 1 - \cos x}{5x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{3}{5}\cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$

27) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^{50} + (x-3)}{x - 3} & \text{si } x > 3 \\ \cos(3 - x) & \text{si } x < 3 \end{cases}$ en $x = 3$

28) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ en $x = 3$

29) Trouvez la valeur de c pour que la fonction f soit continue en $x = c$ où :

$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leqslant c \\ x & \text{si } x > c \end{cases}$

Résumé de l'unité

1) L'ensemble des nombres réels prolongé $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

a $+\infty + a = +\infty$ **b** $-\infty + a = -\infty$ **c** $\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$

d $+\infty \times a = \begin{cases} -\infty, \text{ si } a < 0 \\ +\infty, \text{ si } a > 0 \end{cases}$ **e** $-\infty \times a = \begin{cases} -\infty, \text{ si a} > 0 \\ +\infty, \text{ si a} < 0 \end{cases}$

2) Si la valeur de f tend vers une valeur unique ℓ quand $x \longrightarrow a$ à gauche et à droite, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ qui se lit limite $f(x)$ quand x tend vers a est égale à ℓ.

3) L'existence de la limite d'une fonction lorsque $x \longrightarrow$ a ne signifie pas forcement que la fonction est définie en $x = a$ Réciproquement, une fonction est définie en $x = a$ ne signifie forcement pas que la fonction admet une limite lorsque $x \longrightarrow a$.

4) $\lim\limits_{x \to a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + ... + c_0$.

5) Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

6) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ alors:

a $\lim\limits_{x \to a} c . f(x) = c . \ell$ où $c \in R$ **b** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$

c $\lim\limits_{x \to a} f(x) . g(x) = \ell . m$ **d** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$ où $m \neq 0$

e $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \ell^n$ où $L^n \in R$ **f** $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$ où $\sqrt[n]{\ell} \in R$

7) Quelques théorèmes et corollaires des limites:

a $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ **b** $\lim\limits_{x \to a} \frac{(x + a)^n - a^n}{x} = na^{n-1}$

c $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$

8) Limite d'une fonction à la infini:

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ {où $n \in \mathbb{R}^+$, a constant}

c $\lim\limits_{x \to a} c = c$, où c constant ; si n est un nombre entier positif, alors $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = +\infty$

9) Pour trouver où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions polynômes, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$:

a La limite est égale à un nombre réel non nul si le degré du numérateur = degré du dénominateur.

b La limite est égale à zéro si le degré du numérateur < degré du dénominateur.

c La limite est égale à $\pm +\infty$ si le degré du numérateur > degré du dénominateur.

10) **a** $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$, où $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$ où $a \in \mathbb{R}$

b $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$ où a est un nombre réel, $a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

c Si x est un angle mesuré en radians, alors: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

d $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

11) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égale à ℓ si et seulement si, la limite à droite et la limite à gauche de la fonction quand x tend vers a sont égales et chacune d'elles est égale à ℓ.

On la note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $f(a^+) = f(a^-) = \ell$ où:

a $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

12) La fonction f est continue en $x = a$ si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

a $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe **b** $f(a)$ existe **c** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

13) Si $f(x)$ est définie sur l'intervalle [a , b], alors la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle [a , b] si:

a La fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle]a , b[

b $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ **c** $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

14) Quelques formes des fonctions continues:

- La fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur son ensemble de définition.
- Les fonctions de sinus et de cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction de la tangente $f(x) = \tan x$ est continue sur $\mathbb{R} - \{ x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi , n \in \mathbb{Z} \}$



Exercices généraux



Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{x} = \ldots\ldots$

$(6\ ,\ \pi\ ,\ 6\pi\ ,\ 0)$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} = \ldots\ldots$

$(2\ ,\ 3\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{2})$

3 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + 3) = \ldots\ldots$

(not exist , 0 , 3 , 4)

4 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x^3 - 8} = \ldots\ldots$

$(4\ ,\ \frac{5}{3}\ ,\ 0\ ,\ 6\frac{2}{3})$

5 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} = \ldots\ldots$

$(\frac{5}{7}\ ,\ \frac{1}{7}\ ,\ -1\ ,\ -5)$

6 $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x} = \ldots\ldots$

$(1\ ,\ \pi^2\ ,\ \pi\ ,\ -\pi)$

Trouvez les limites suivantes s'il existe:

7 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 + x - 2}$

8 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 10x + 25}$

9 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - 2}$

10 $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{2x^2 + 3x - 9}{2x - 3}$

11 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$

12 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x-3)^5 - 32}{x^2 - 5x}$

13 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - \sqrt{x + 15}}{1 - x^2}$

14 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{25 + x} - 5}{\sqrt{1 + x} - 1}$

15 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2 - 3\,\mathrm{Sin}\,x}{x}$

16 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3x^2}$

17 Si $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f(x) - 5}{x + 3} = 4$ trouvez $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

18 Si $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leqslant 3 \\ 3x - 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ trouvez la valeur de:

a $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

b $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

c $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

19 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{x^2 + 1}$

20 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3 - 5x}{x^4 + 3}$

21 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^4 - 2x + 1}{x^3 + 4}$

22 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^{-1} + 5}{7 + 9x^{-2}}$

23 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3x}{2x + 7}\right)$

24 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x - 3}{\sqrt{4x^2 + 7}}$

25 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\sqrt{4x^2 - 3}$

26 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$

27 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$

28 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{3x}$

29 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$

30 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Sin}^2 4x}{2x^2}$

31 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 2x}{5x}$

32 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2x - \pi}{\cos x}$

33 Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\sin x} & \text{si } x < 0 \\ \cos 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ etudiez l'existence $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

34 Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \tan \dfrac{\pi}{4} x & \text{si } x < 1 \end{cases}$ etudiez l'existence $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

35 Trouvez la valeur du constant a pour que la fonction f admette une limite lorsque $x \longrightarrow 0$

où $f(x) = \begin{cases} a + \cos x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\tan 2x}{a\,x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

36 Etudiez la continuité de la fonction f telle que $f(x) = 5 - |x - 3|$ en $x = 3$

37 Soit f telle que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ trouvez la valeur de k pour que la fonction soit continue en $x = 1$.

38 Redéfinissez la fonction f, si cela est possible, telle que $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & \text{si } x > 1 \\ 5x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ pour que la fonction soit continue en at $x = 1$.

39 Soit f telle que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2x - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ trouvez la valeur de k pour que la fonction soit continue en $x = 0$.

40 Etudiez la continuité de la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 1 - \cos 2x & \text{si } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

41 Si la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leqslant -1 \\ a\,x + b & \text{si } -1 < x < 3 \\ -2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

est continue sur $\mathbb{R}$ trouvez les valeurs de a et b?



Épreuve cumulative



Complétez ce qui suit:

1. $x^2 - x - 6 = (x - \ldots)(x + \ldots)$
2. $(\sqrt{x^2 - 3x} - x)(\sqrt{x^2 - 3x} + x) = \ldots$
3. $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x - 4}{x - 1} = \ldots$
4. $\dfrac{\cos \pi}{\pi} = \ldots$
5. $\dfrac{\cos \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \ldots$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x - 2}{x} = \ldots$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{2x} = \ldots$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x} = \ldots$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{4 - 3x^2} = \ldots$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \ldots$

Trouvez les limites suivantes s'il existe:

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin 4x}{\sin 3x}$
12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^9 - 1}{1 - x^5}$
13. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 9}$
14. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$
15. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{|x + 1|}$
16. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ où $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cot x}{\pi - 2x} & \text{si } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin(\pi - x) & \text{si } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes:

17. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ \sin(\pi - x) & \text{si } x = 2 \end{cases}$

 a) en $x = 2$ b) sur $\mathbb{R}$

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ sur $\mathbb{R}$
19. Soit f une fonction telle que $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Trouvez

 a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

20. Trouvez les valeurs de a pour que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe où $f(x) = \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{a}{x^2 - 1}\right)$

Calculez les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+5}{6x-8}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2+x}{2x^3-5}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-2x^2+1}{1-3x}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{5x^3+5x^2} - x^3)$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-3x} - x)$

7. Étudiez la continuité de chacune des fonctions définies ci-dessous suivantes aux points indiqués:

   a. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leqslant 4 \\ 7+\dfrac{16}{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$ en $x = 4$

   b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$

8. Si $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \neq 4 \\ 1 \text{ si } x = 4 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 4x-10 & \text{si } x \neq 4 \\ -6 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

   Etudiez la continuité de chacune des fonctions suivantes en $x = 4$

   a. $f(x)$ b. $g(x)$ c. $f(x) \cdot g(x)$

   d. $|f(x)|$ e. $g(x) - 6f(x)$ f. $g(f(x))$

9. Trouvez la valeur de k pour que la fonction définie ci-après soit continue sur $\mathbb{R}$.

   a. $f(x) = \begin{cases} 7x-2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -kx^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   b. $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x+k & \text{si } x > 2 \end{cases}$

   c. $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si } x \geqslant -3 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{si } x < -3 \end{cases}$

10. Trouvez la valeur de k et m pour que la fonction définie ci-après soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+5 & \text{si } x \geqslant 2 \\ m(x+1)+k & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x^3+x+7 & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

11. Etudiez la continuité de la fonction f telle que:

   a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ sur son ensemble de définition

   b. $f(x) = \dfrac{x-2}{|x|-2}$ sur $\mathbb{R}$



Unité (4)

Trigonométrie

Introduction de l'unité

Le trigonométrie est l'un des branches des mathématiques dont les pharaons sont des premiers qui le sont utilisé. Ils sont utilisés les règles trigonométriques pour bâtir les pyramides et les temples. Les grecs ont élaboré les règles trigonométriques pour trouver des relations liant les longueurs des cotés d'un triangle par les mesures de ses angles. Ils ont également créé une méthode pour élaborer les tableaux des sinus dans le triangle. Nous signalons ici que le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) qui a présenté une nouvelle expression des fonctions trigonométriques. Il a également présenté beaucoup des symboles qui sont utilisés dans les problèmes de mathématiques présentés actuellement à nos étudiants dans les écoles et les universités. Dans cet unité, nous allons étudier les règles qui relient les longueurs des cotés d'un triangle par la mesure de ses angles.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Déduire la loi de sinus dans un triangle dont l'énoncé est : «Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés»
- Utiliser la loi de sinus pour trouver les longueurs des côtés d'un triangle
- Utiliser la loi de sinus pour trouver les mesures des angles d'un triangle (Il y a deux solutions pour un angle inconnu).
- Déduire la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle et utiliser
- cette relation pour résoudre des exercices variés.
- Identifier et déduire la loi de cosinus dans un triangle.
- Utiliser la loi de cosinus pour trouver la longueur d'un côté inconnu dans un triangle.
- Utiliser la loi de cosinus pour trouver la mesure d'un angle
- inconnu dans un triangle.
- Utiliser les lois de sinus et cosinus pour résoudre un triangle
- dans l'un des cas suivants :
  - en connaissant les mesures de deux de ses angles et la longueur de l'un de ses côtés.
  - en connaissant les longueurs de deux de ses côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.
  - en connaissant les longueurs de ses trois côtés.
- Utiliser la calculatrice pour résoudre des exercices et des activités variées en utilisant les lois de sinus et cosinus dans un triangle.

Vocabulaires de base

- Trigonométrie
- Loi de sinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit
- Cas ambigu
- Solutions possibles
- Solution unique
- Le plus petit côté
- Le plus long côté
- Aire du triangle
- Longueurs des cotés d'un triangle
- Angles inconnus
- Le plus petit angle
- Le plus grand angle
- Loi de cosinus

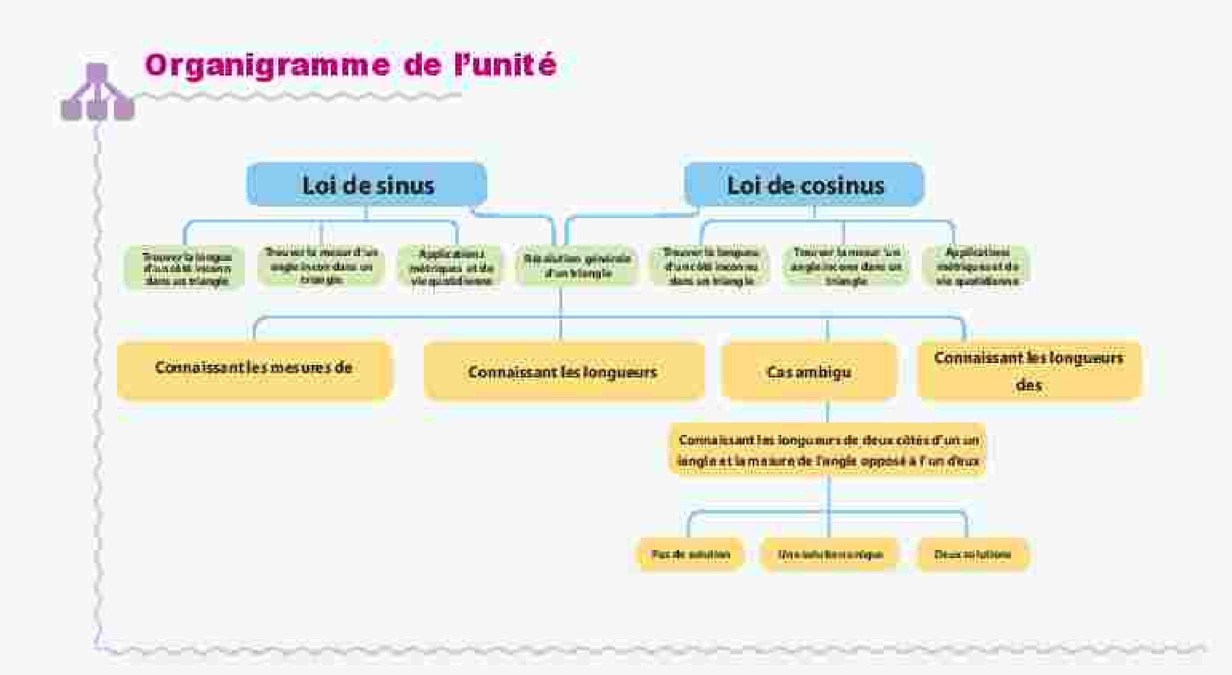
Leçons de l'unité

Leçon (4 - 1) : Loi de sinus
Leçon (4 - 2) : Loi de cosinus

Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique

Organigramme de l'unité



4 - 1 Loi de sinus

Vous avez déjà étudié comment utiliser un triangle rectangle pour trouver la hauteur d'un minaret, sans avoir besoin de la mesurer, en étant à une distance connue de sa base. Dans la suite, nous allons apprendre des méthodes pour trouver les longueurs des côtés d'un triangle quelconque.

Allez apprendre

- Lois de sinus dans un triangle.
- Utilisation de la loi de sinus pour résoudre un triangle.
- Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de sinus.
- Utilisation de la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle pour résoudre des problèmes.

Vocabulaires de base

- Trigonométrie
- Loi de sinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit
- Cas ambigu

Aides pédagogiques

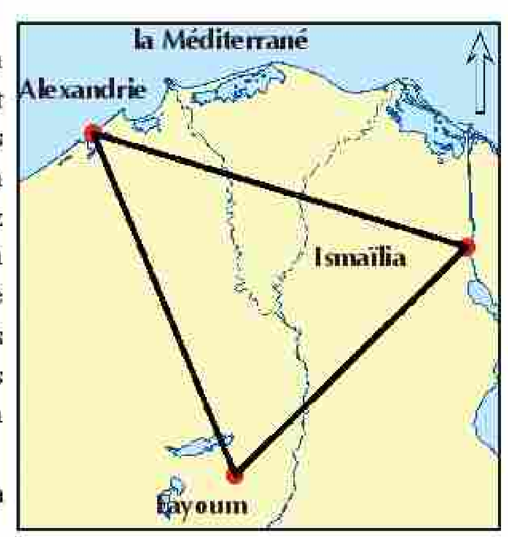
- Calculatrice scientifique

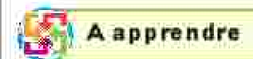


Activité

Karim veut déterminer la distance entre Fayoum et Ismaïlia en utilisant les données existantes sur la carte ci-contre. Mesurez les longueurs sur le dessin (l'échelle est 1 cm représente 43 km). Justifiez vos mesures après votre étude des méthodes de solution d'un triangle non rectangle.

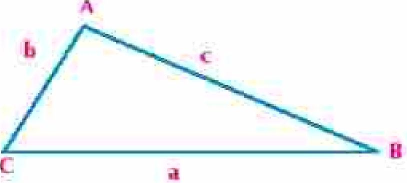
L'une de ces méthodes est la loi de sinus





A apprendre

Loi (règle) de sinus



Dans le triangle ABC, on utilise le symbole a pour noté le coté opposé à l'angle A, le symbole b pour noté le coté opposé à l'angle B et le symbole c pour noté le coté opposé à l'angle C. On peut utiliser la règle du calcule de l'aire du triangle pour déduire la loi de sinus indiquant la relation entre les longueurs des cotés d'un triangle et les sinus des angles qui lui sont opposés.

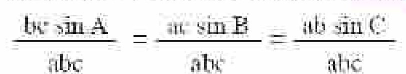
On a : $\frac{1}{2}$ b c sin A = $\frac{1}{2}$ a c sin B = $\frac{1}{2}$ a b sin C

les formules du calcule de l'aire d'un triangle sont égales

Remarque

Aire du triangle
A = $\frac{1}{2}$ produit des longueurs de deux cotés × sinus de l'angle compris entre les deux côtés

$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$ **Multipliant par 2**

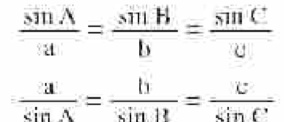


$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$

En divisant les trois membres par a b c on obtient



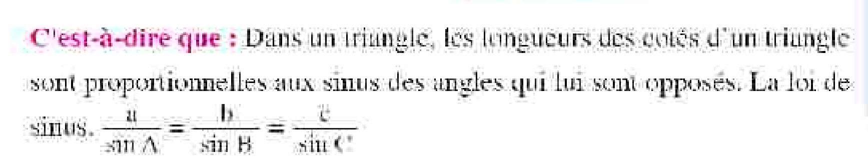
En simplifiant



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

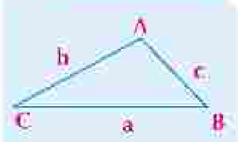
D'après les propriétés de la proportionnalité



C'est-à-dire que : Dans un triangle, les longueurs des cotés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles qui lui sont opposés. La loi de sinus. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



Remarque



Aire du triangle A B C

$= \frac{1}{2}$ **ab sin C**

$= \frac{1}{2}$ **ac sin B**

$= \frac{1}{2}$ **bc sin A**

Auto-apprentissage: Peut-on démontrer la loi de sinus par une autre méthode ? Comment ?

Utiliser la loi (règle) de sinus pour trouver la longueur du coté dans un triangle

Exemple

1. Trouvez la longueur du plus grand côté dans un triangle ABC tel que $m(\angle A) = 54° 33'$, $m(\angle B) = 49° 22'$, $a = 124.5$ cm



Solution

Le plus grand côté est opposé au plus grand angle **(Inégalité dans le triangle)**

$m(\angle C) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B)]$

$= 180° - [45° 33' + 49° 22'] = 76° 5'$

$\therefore$ Le plus grand côté est c car il est opposé à l'angle C qui est le plus grand angle

$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ $\qquad \therefore \frac{124.5}{\sin 54° 33'} = \frac{c}{\sin 76° 5'}$

$\therefore c = \frac{124.5 \sin 76° 5'}{\sin 54° 33'} = 148.4$cm



Remarque

Dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle. Le plus petit côté est opposé au plus petit angle

Essayez de résoudre

1. Trouvez la longueur du plus petit côté dans un triangle ABC tel que $m(\angle A) = 43°$, $m(\angle B) = 65°$, $c = 8.4$cm

Résolution d'un triangle en utilisant la loi de sinus

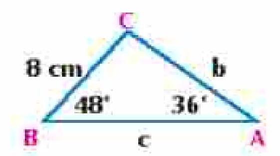
La loi de sinus permet de résoudre un triangle en connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux de ses angles (On peut calculer la mesure du troisième angle).

[I] Résolution d'un triangle en connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux angles :

Exemple

(2) Résolevez le triangle ABC tel que $a = 8$ cm , $m(\angle A) = 36°$, $m(\angle B) = 48°$

Solution



$m(\angle C) = 180° - (36° + 48°) = 96°$

$\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ $\quad \therefore \frac{\sin 36°}{8} = \frac{\sin 48°}{b}$

$\therefore b = \frac{8 \sin 48°}{\sin 36°} \simeq 10.114$ cm

On utilise la calculatrice pour effectuer les opérations. Vérifierz d'abord que la calculatrice est réglée pour les mesures des angles en degrés puis appuyer sur les boutons dans l'ordre suivant :

(8 × sin 4 8) ÷ sin 3 6 =

$\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ $\quad \therefore \frac{\sin 36°}{8} = \frac{\sin 96°}{c}$ $\quad \therefore c = \frac{8 \sin 96°}{\sin 36°} \simeq 13.535$cm

On utilise la calculatrice comme suit :

(8 × sin 9 6) ÷ sin 3 6 =

Dans $\triangle$ ABC: $b = 10.114$ cm , $c = 13.535$ cm ,

Essayez de résoudre

(2) Résolevez le triangle ABC tel que $a = 8$cm , $m(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 40°$

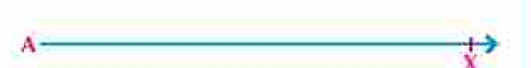
[II] Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure d'un angle opposé à l'un des deux côtés de longueurs données

Cas ambigu

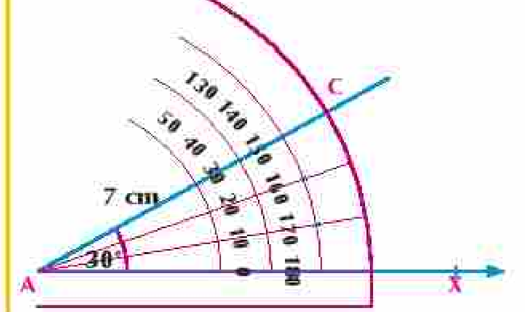
Tracez le triangle ABC (si cela est possible) selon les mesures dans le tableau ci-contre :

longueur de $\overline{AC}$ cm	$m(\angle A)$	longueur de $\overline{BC}$ cm
7	30°	3.5
		5
		2

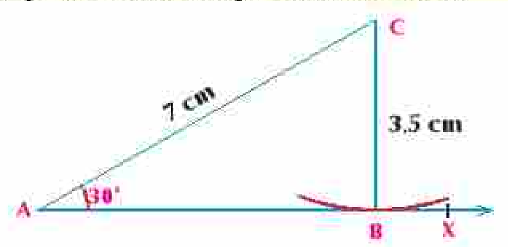
1 - Du point A, tracez $\overrightarrow{AX}$ et faisant



2 - Du point A, tracez $\overline{AC}$ de 7cm de longueur et un angle de 30° de mesure avec $\overrightarrow{AX}$

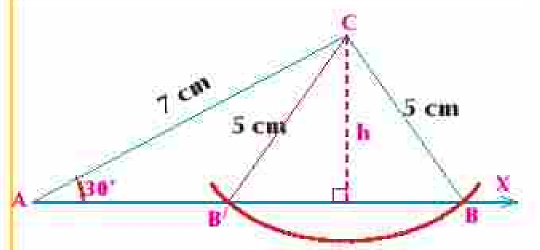


3 - Si BC = 3,5 cm : mettez la pointe sèche du compas sur le point C. Avec une ouverture de 3,5 cm puis tracez un arc qui touche $\overrightarrow{AX}$ en B.



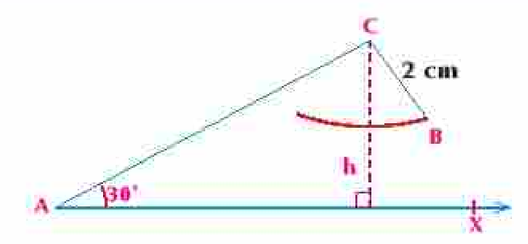
- Mesurez le segment $\overline{AB}$ et comparez sa longueur et la longueur de la perpendiculaire issue du point C à $\overrightarrow{AX}$. Que remarquez-vous ?

4 - Lorsque BC = 5 cm répétez l'étape 3. Avec une ouverture de 5 cm puis tracez un arc qui coupe $\overrightarrow{AX}$. **Que remarquez-vous ?**



- Mesurez le segment $\overline{CB}$ et $\overline{CB'}$ Que remarquez-vous ?
- Comparez sa longueur et la longueur de la perpendiculaire issue du point C à $\overrightarrow{AX}$. **Que remarquez-vous ?**

5- Lorsque BC = 2 cm répétez l'étape 3. Avec une ouverture de 2 cm puis tracez un arc. Cet arc coupe-t-il $\overrightarrow{AX}$?

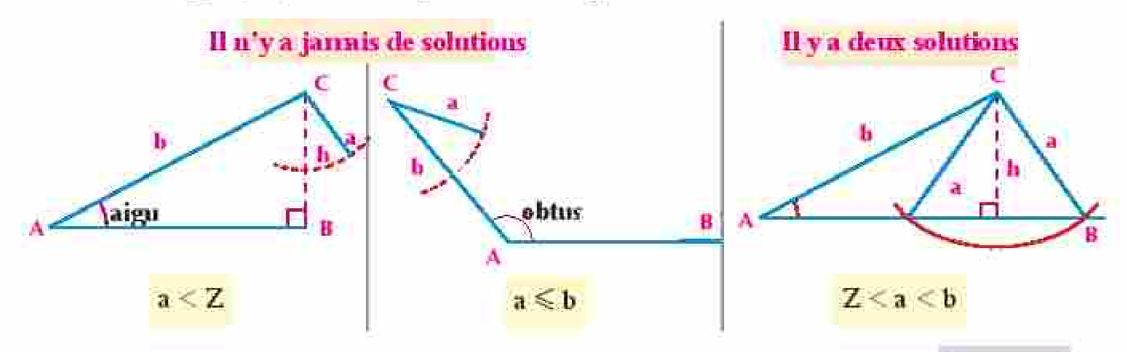


- Comparez la longueur du $\overline{BC}$ et la longueur de la perpendiculaire issue du point C à $\overrightarrow{AX}$.

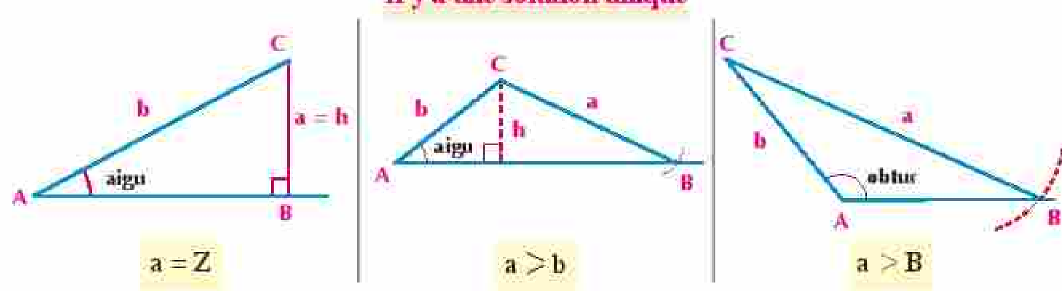
Exercice sur l'activité précédente :

- Répétez l'activité précédente dans le cas où l'angle $\angle C$ est un angle obtus et étudiez les différents cas.

- D'après l'activité précédente, on peut déduire les différents cas de résolution du triangle ABC étant donné $\angle A$, a , b et h est la plus courte longueur entre C et AB.



Il y a une solution unique



Exemple Application sur l'activité

3) Dans chacun des cas suivants, indiquez si le triangle a une solution unique, deux solutions ou n'a pas de solution. Trouvez les solutions possibles puis donnez un résultat approché à un décimal près.

a) $\triangle ABC$ dans le quel $m(\angle B) = 110°$, $b = 8cm$ et $c = 5cm$

b) $\triangle DEF$ dans le quel $m(\angle D) = 60°$, $d = 7cm$ et $e = 9cm$

c) $\triangle LMN$ dans le quel $m(\angle L) = 40°$, $l = 12cm$ et $m = 15cm$

Solution

a) $\because \angle B$ est obtus , $b > c$

$\therefore$ Le triangle a une solution unique $\because \frac{5}{\sin C} = \frac{8}{\sin 110°}$ **(Règle de sinus)**

$\therefore \sin C = \frac{5 * \sin 110°}{8} \simeq 0.5873$

D'où $m(\angle C) \simeq 36°$

$\therefore m(\angle A) \simeq 180° - (110° + 36°) \simeq 34°$,

$\because \frac{a}{\sin 34°} \simeq \frac{8}{\sin 110°}$ $\qquad \therefore a \simeq \frac{8 * \sin 34°}{\sin 110°} \simeq 4.8$ cm

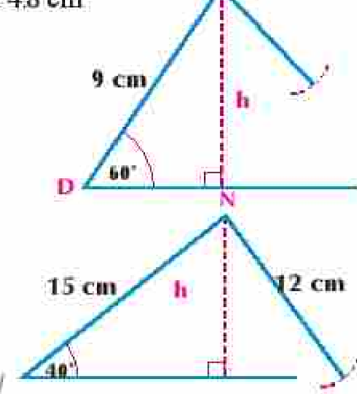
C'est-à-dire que : $m(\angle A) \simeq 34°$, $m(\angle C) \simeq 36°$, $a \simeq 4.8$ cm

b) $\because \angle D$ aigu , $d < e$

$h = e \sin D = 9 \sin 60 \simeq 7.8cm$

$\because d < h$ $\qquad$ (où $7 < 7.8$)

Donc il n'y a pas de solutions



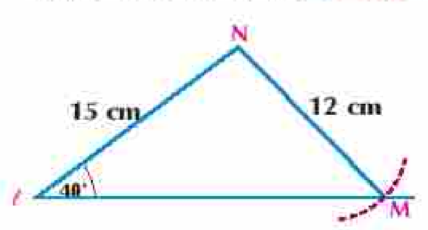
c) $\because \angle L$ est aigu , $\ell < m$ (où $12 < 15$),

$h = 15 \sin 40 \simeq 9.6$ cm

$\because h < \ell < m$ (où $9.6 < 12 < 15$)

Donc le triangle LMN admet deux solutions.

La première solution : $\angle M$ est aigu



$\because \frac{15}{\sin M} = \frac{12}{\sin 40°}$

$\therefore \sin M = \frac{15 \times \sin 40°}{12}$ $\sin M \simeq 0.8035$

$\therefore m(\angle M)\ 53.46°$

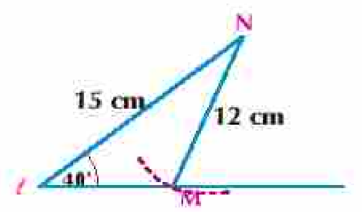
$\therefore m(\angle N) \simeq 180° - (40° + 53.46°)$

$\simeq 86.54°,$

$\because \frac{n'}{\sin 86.54°} \simeq \frac{12}{\sin 40°}$

$\therefore n \simeq \frac{12 \times \sin 86.54°}{\sin 86.54°} \simeq 18.63$ cm

La deuxième solution : $\angle M$ est obtus



$\because$ Dans le deuxième quadrant la sinus est positive,

$\sin M \simeq 0.8035$

$\therefore m(\angle M) \simeq 180° - 53.46° \simeq 126.54°,$

$X(\angle N) \simeq 180° - (40° + 126.54°)$

$\simeq 13.46°$

$\because \frac{n'}{\sin 13.46°} = \frac{12}{\sin 40°}$

$\therefore n \simeq \frac{12 \times \sin 13.46°}{\sin 40°} \simeq 4.35$ cm

C'est-à-dire que : l'une de deux solution est $m(\angle M) \simeq 53.46°$, $m(\angle N) \simeq 86.54°$, $n \simeq 18.63$ cm

L'autre solution est : $m(\angle M) \simeq 126.54°$, $m(\angle N) \simeq 13.46°$, $n \simeq 4.35$cm

Essayez de résoudre

3) Dans chacun des cas suivants, indiquez si le triangle a une solution unique, deux solutions ou n'a pas de solution. Trouvez les solutions possibles puis donnez un résultat approché à un décimal près.

a) $\triangle ABC$ dans le quel $m(\angle A) = 100°$, $a = 12$ cm et $b = 15$cm

b) $\triangle DEF$ dans le quel $m(\angle E) = 35°$, $e = 9$ cm et $e = 5$ cm

c) $\triangle MNL$ dans le quel $m(\angle M) = 52°$, $m = 21$ cm et $n = 26$ cm

Exemple

4) **En lien avec la géographie :** La figure ci-contre représente les positions de trois villes égyptiennes. Si la distance sur le dessin entre le Suez et le Caire est 8 cm et la mesure de l'angle dont le sommet est Fayoum est 40°. Trouvez à un kilomètre près.

a) La distance entre le Caire et Fayoum

b) La distance entre le Suez et Fayoum

le Caire A — 8 cm — Suez B (30°)

Fayoum C (40°)

Solution

$m(\angle A) = 180° - (30° + 40°) = 110°$

$\because \frac{AC}{\sin 30°} = \frac{BC}{\sin 110°} = \frac{8}{\sin 40°}$

$\therefore AC = \frac{8 \times \sin 30°}{\sin 40°} \simeq 6.22$cm

$\therefore$ La distance entre le Caire et Fayoum $\simeq 6.22 * 16.75 \simeq$ 104 km

$BC = \dfrac{8 * \sin 110^\circ}{\sin 40^\circ} \simeq 11.7$cm

$\therefore$ La distance entre le Suez et Fayoum $\simeq 11.7 * 16.75 \simeq$ 196 km

Essayez de résoudre

4) Dans l'activité page (154):

a) En utilisant les instruments géométriques, trouvez les mesures des angles du triangle ainsi que la distance entre fayoum et Alexandrie.

b) En utilisant la règle de sinus, trouvez :

I: La distance entre Ismailia et Fayoum. **II:** La distance entre Alexandrie et Ismailia.

Applications géométriques de la loi de sinus

Problème type

Dans un triangle ABC on a : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2r$

où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

Démonstration :-

Si le cercle passe par les sommets d'un triangle acutangle

On trace le cercle passant par les sommets du triangle ABC acutangle ABC puis on trace le diamètre $\overline{BX}$ and et la corde $\overline{XA}$

$\because m(\angle BAX) = 90^\circ$, $m(\angle AXB) = m(\angle ACB)$

$\therefore \sin X = \dfrac{AB}{BX}$, $\sin C = \dfrac{AB}{BX}$

D'où $AB = BX \sin C$

$\therefore c = 2r \sin C$ $\qquad \dfrac{c}{\sin C} = 2r$



De la même manière, nous pouvons démontrer que : $\dfrac{a}{\sin A} = 2r$, $\dfrac{b}{\sin B} = 2r$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2r$

Auto-apprentissage : Démontrez la règle précédente si le cercle passe par les sommets d'un triangle obtusangle



Exemple

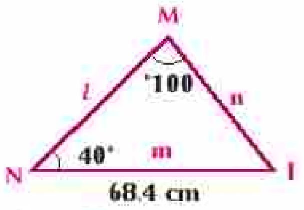
5) MNO est un triangle tel que tel que n = 68.4cm , $m(\angle M) = 100^\circ$, $m(\angle N) = 40^\circ$. Trouvez:

a) m

b) la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle MNO

c) l'aire du triangle MNO

Solution



$m(\angle M) = 180° - (100° + 40°) = 40°$

$$\frac{l}{\sin 40°} = \frac{68.4}{\sin 100°}$$ **(Régle de sinus)**

$$m = \frac{68.4}{\sin 100°} \times \sin 40° \simeq 44.64\text{cm}$$ **ce qu il fout démontrer (1)**

$$\because \frac{m}{\sin M} = 2r \qquad \therefore \frac{68.4}{\sin 100°} = 2r$$

Donc on a $r = \dfrac{68.4}{2 \sin 100°} \simeq 34.72$ cm **ce qu il fout démontrer (2)**

Aire le triangle MNO $= \frac{1}{2}$ n m sin O $= \frac{1}{2} \times 68.4 \times 44.64 \sin 40° = 981.1$ cm^2

Essayez de résoudre

(5) Résolvez le triangle AB C tel que a = 25 cm , $m(\angle B) = 35°\ 18'$,
$m(\angle C) = 103°\ 42'$ Calculez ensuite son aire et la longueur du rayon de son cercle circonscrit.



Exemple

(6) ABCD est un trapèze tel que $\overline{AD} \,//\, \overline{BA}$, AD = 7.4cm , $m(\angle B) = 62°$, $m(\angle D) = 106°$,
$m(\angle ACB) = 41°$. Trouvez

I: la longueur de $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ **II**: Aire du trapèze ABCD à un centimètre carré près

Solution

Dans le triangle ACD

$\because m(\angle DAC) = m(\angle ACB) = 41°$ **(Deux angles alterne - internes)**

, $m(\angle ACD) = 180° - (41° + 106°) = 33°$

$$\because \frac{AC}{\sin 106°} = \frac{7.4}{\sin 33°} \qquad \therefore AC = \frac{7.4 \times \sin 106°}{\sin 33°} = 13.06\text{cm}$$

Dans le triangle $\qquad m(\angle BAC) = 180° - (62° + 41°) = 77°$

$$\because \frac{BC}{\sin 77°} = \frac{13.06}{\sin 62°} \qquad \therefore BC = \frac{13.06 \times \sin 77°}{\sin 62°} = 14.41\text{cm}$$

$$\because \frac{AE}{AC} = \sin 41° \qquad \therefore AE = 13.06 \times \sin 41° = 8.568\text{cm}$$

$\because$ **L'air du trapèze** = **base moyenne** × **hauteur.**

$$= \frac{AD + BC}{2} \times AE = \left(\frac{7.4 + 14.41}{2}\right) \times 8.568 = 92.434\text{cm}^2 \simeq 92\text{cm}^2$$

Essayez de résoudre

(6) ABCD est un quadrilatère tel que CD = 100 cm , $m(\angle BCA) = 36°$, $m(\angle BDA) = 55°$,
$m(\angle BCD) = 85°$, $m(\angle CDA) = 87°$, Trouver la longueur de $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ à un centimètre près.

 **Exercises 4 - 1** 

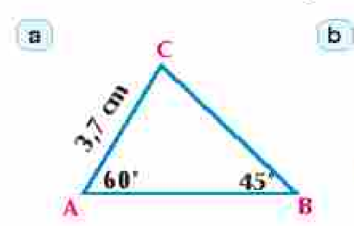
Complétez ce qui suit:

1. Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux ....
2. Dans un triangle ABC si $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$ alors $a : b : c =$ ....
3. Soit ABC est un triangle équilatéral de longueur de côté 2cm. La longueur du diamètre du cercle circonscrit au triangle = ...
4. Si ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 60°$, $m(\angle C) = 40°$ et $c = 8.4$ cm alors $a =$ .... cm
5. Dans un triangle ABC on a $\frac{2\,b}{\sin B} =$ .... r

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :-

6. Si ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 30°$, $a = 10$ cm alors la longueur du rayon de son cercle circonscrit est ....
   - a) 10cm
   - b) 20cm
   - c) 5cm
   - d) 40cm
7. Si la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est égale à 4cm , $m(\angle A) = 30°$ alors $a =$
   - a) 4cm
   - b) 2cm
   - c) $4\sqrt{3}$
   - d) $\frac{1}{16}$
8. Dans un triangle ABC, l'expression $2\,r \sin A$ est égale à ....
   - a) a
   - b) b
   - c) c
   - d) l'aire des ($\triangle ABC$)
9. Si r est le rayon du cercle circonscrit au triangle XYZ , alors $\frac{y}{2 \sin Y}$ est égal à ....
   - a) r
   - b) 2r
   - c) $\frac{1}{2}$ r
   - d) 4r
10. Si MNO est un triangle tel que $m(\angle M) = 30°$, NO = 7cm alors la longueur du rayon de son cercle circonscrit est ....
    - a) 7cm
    - b) 3.5cm
    - c) 14cm
    - d) $\frac{14}{\sqrt{3}}$
11. Dans un triangle XYZ, si $3 \sin X = 4 \sin Y = 2 \sin Z$, alors $x : y : z =$ ....
    - a) 2 : 3 : 4
    - b) 6 : 4 : 3
    - c) 3 : 4 : 6
    - d) 4 : 3 : 6
12. **Réslvez chacun des triangles suivants**

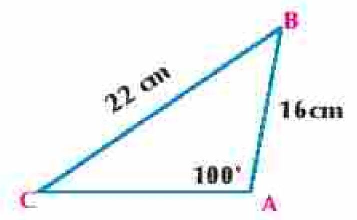
a)



b)

17 cm
A
12cm
15°
B
C

c)



13. Dans chacun des cas suivants, indiquez si le triangle a une solution unique, deux solutions ou n'a pas de solution. Trouvez les solutions possibles puis donnez un résultat approché a un décimal près.
    - a) $m(\angle A) = 105°$, $a = 8$cm , $b = 5$cm
    - b) $m(\angle A) = 47°$, $a = 4$cm, $b = 6$ cm
    - c) $m(\angle A) = 38°$, $a = 10$cm, $b = 14$ cm
    - d) $m(\angle A) = 36.87°$, $a = 6$cm, $b = 10$ cm

14 Dans chacun des cas suivants : résoudre le triangle ABC donnez une valeur approché au résultat à un décimal près

a $m(\angle A) = 40°$, $m(\angle B) = 30°$, $b = 10cm$ **b** $m(\angle A) = 50°$, $a = 4cm$, $b = 3$ cm

c $m(\angle B) = 33°$, $b = 7cm$, $c = 10$ cm **d** $m(\angle C) = 116°$, $c = 12cm$, $a = 10$ cm

15 Résoudre le triangle ABC dans chacun des cas suivants :

a $m(\angle A) = 32°$, $a = 17cm$, $b = 11cm$ **b** $m(\angle A) = 49°$, $a = 32cm$, $b = 38cm$

c $m(\angle B) = 70°$, $b = 14cm$, $c = 14cm$ **d** $m(\angle C) = 103°$, $b = 46cm$, $c = 61cm$

16 ABC est un triangle dans lequel $(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 45°$, démontrez que $a : b : c = \sqrt{6} : 2 : \sqrt{3} + 1$

17 ABCD est parallélogramme tel que AB = 19,77cm les angles formés par ses diagonales et $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ son coté $\overline{AB}$ angles of mesurent 36° 22' et 44° 58', Trouvez la longueur de chacune de ses diagonales

18 ABC est un triangle dans lequel AB = 8,356cm, $m(\angle A) = 41° 20'$, $m(\angle B) = 59° 17'$ Trouvez

a b **b** la longueur de la perpendiculaire issue du c à $\overline{AB}$

19 ABCD est trapèze dans lequel $\overline{AD} // \overline{BC}$, AD = 10,7cm, $m(\angle D) = 100°$, $m(\angle B) = 61° 19'$, $m(\angle CAD) = 33° 50'$, trouver les longueurs de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$

20 ABCD est quadrilatère dans lequel $m(\angle BCD) = 85°$, $m(\angle CDA) = 87°$, $m(\angle BCA) = 36°$, $m(\angle BDA) = 55°$ CD = 1000 mètres trouver les longueurs de $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ à un mètre près

21 ABC est un triangle tel que sin C = 0,35 , c = 14cm, Trouver l'aire de son cercle circonscrit en fonction de π

22 ABC est un triangle dans lequel a = 58, $m(\angle B) = 38°$, $(\angle C) = 62°$. Trouvez la longueur de la perpendiculaire issue de A à $\overline{BC}$

23 ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 45°$, Si $a + b = (\sqrt{6} + 2)$ cm trouvez la longueur de a, b

24 ABC est triangle inscrit dans un cercle de 20 cm de diamètre. Si $m(\angle A) = 42°$, $m(\angle B) = 74° 48'$, trouver la longueur des cotés du triangle ABC

25 ABC est un triangle tel que c = 19cm, $m(\angle A) = 112°$, $m(\angle B) = 33°$, trouvez b et le rayon de son cercle circonscrit à deux décimaux près

26 **En lien avec la géographie :** La figure ci-contre représente les positions de trois villes A, B et C. Trouvez, à un kilomètre près la distance entre :

a A et C **b** B et C

27 **Problème ouvert :** ABC est triangle dans lequel $m(\angle B) = 58°$, a = 42 cm. Trouvez b de sorte que le triangle ABC n'ait pas de solution. Vérifiez votre réponse

28 **Réflexion créative :**

a Dans le triangle ABC, démontrez que $\frac{3a - 4b}{3 \sin A - 4 \sin B} = \frac{c}{\sin C}$

b Soit Δ l'aire du triangle ABC. Démontrez que $\Delta = a^2 \left(\frac{\sin B \sin C}{2 \sin A}\right)$

4 - 2 Loi de cosinus

Allez apprendre

- Lois de cosinus dans un triangle.
- Utilisation de la loi de cosinus pour résoudre un triangle.
- Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de cosinus



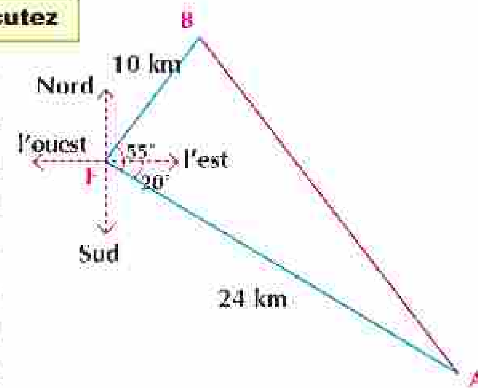
Vocabulaires de base

- Loi de cosinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

Réfléchissez et discutez



Deux bateaux A et B se déplacent, en même temps d'un port. Le bateau A se déplacent dans la direction 20° Sud par rapport à l'Est, il a parcouru 24 km. Le bateau B meut dans la direction 55° Nord par rapport à l'Est, il a parcouru une distance de 10 km dans le même temps.

Trouvez la distance qui sépare les deux bateaux à la fin de cette duré du temps. Utilisez les instruments géométriques pour déterminer l'échelle et trouver la longueur du $\overline{AB}$.

Peut on utiliser la règle de sinus pour trouver la longueur de $\overline{AB}$?

Peut on déduire une autre règle pour trouver la longueur de $\overline{AB}$ en fonction des longueurs de $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ et la mesure de l'angle comprise entre eux ?Justifiez votre réponse.



A apprendre

Loi (règle) de cosinus

Le triangle BDC, rectangle en D :

$(BC)^2 = (CD)^2 + (BD)^2$ **(Théorème de Pythagore)**

C'est-à- dire :

$a^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2$

$= b^2 \operatorname{Sin}^2 A + b^2 \cos^2 A + c^2 - 2bc \cos A$



(En développant)



$= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$ **(Prenant b^2 facteur commun)**

$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ **(En simplifiant)**

On a donc :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



Rappel

Identité de pytagore

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Auto-apprentissage : Démontrez la règle précédente dans le cas où $\angle A$ est un angle obtus.

Expression oral : De même façon, écrirez les valeurs de b^2 , c^2 , cos B et cos C

Pensé critique : La règle précédente est-il vraie si le triangle ABC est rectangle en A ? Vérifiez votre réponse.

Formule de cosinus :

Dans un triangle ABC, on a :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos B$, $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2\,c\,a}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b}$

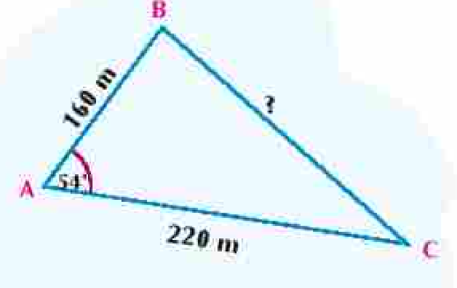


c'est mieux d'utiliser les longueurs de côtés d'un triangle a ; b et c dans un ordre cyclique pour écrire les lois de cosinus pour déduise l'une des ses forme de l'autre.



a La règle de cosinus utilisée, pour trouver la longueur d'un coté dans un triangle, à l'aide de la calculatrice

Un ingénieur veut déterminer la distance entre deux points dont il est difficile d'y arriver. En utilisant l'appareil de mesure de distance, il a trouvé que la distance qui lui sépare et le première point est 160 mètres, celle entre lui et le deuxième point est 220 mètres et la mesure de l'angle et la mesure de l'angle opposé aux deux points est 54°. Utilisez ces informations pour calculez la distance entre les deux points à un kilomètre près.



1 - Déterminez précieusement les donnés accueillis par l'ingénieur.

2 - Identifiez la conclusion.

3 - Représentez les donnés par une échelle convenable en utilisant les instruments géométriques nécessaires .

4 - Trouvez la longueur de $\overline{BC}$ en centimètres.

5 - Calculez la distance réelle entre les deux points B et C à un kilomètre près

6 - Peut-on utiliser la règle de cosinus pour trouver la distance entre les deux points B et C ? Expliquez.

7 - Comparez les deux résultats obtenus par la mesure et en utilisant la règle de cosinus.

Rappel

la longueur réelle = la longueur sur la dessin: l'échelle

D'après l'activité précédent, on trouve que :

1 - L'échelle convenable : 1 cm représente 20 kilomètres

2 - Par mesure : la longueur de $\overline{BC} = 9$ cm.

3 - La longueur réelle de $\overline{BC} \simeq 9 \times 20 \simeq 180$ km

4 - La règle de cosinus est : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos C$

Par substitution $a^2 = (160)^2 + (220)^2 - 2 \times 160 \times 220 \cos 54° \simeq 32619.9$

Alors $a \simeq 180.6$ km.

5 - Les résultats sont proches si le dessin est minutieux, mais les résultats obtenus en utilisant les règles restent plus précis.

6 - Utilisation de la calculatrice scientifique pour trouver le résultat :



2 2 0 × cos 5 4 (= √ =

Application sur l'activité précédente : Calculez la longueur du troisième coté, à un centième près dans le triangle ABC dans chacun des cas suivants :

a) $a = 4.36$ cm , $b = 3.84$ cm, $m(\angle C) = 101°$

b) $b = 2$ cm , $c = 5$ cm, $m(\angle A) = 60°$

Trouver la mesure d'un angle d'un triangle en connaissant ses trois côtés :



1) Trouvez la mesure du plus grand angle dans le triangle ABC tel que $a = 4.6$, $b = 3.2$, $c = 2.8$

Solution

$\because$ Le plus grand angle dans un triangle est opposé au plus grand côté

$\therefore \angle A$ est le plus grand angle

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3.2)^2 + (2.8)^2 - (4.6)^2}{2 \times 3.2 \times 2.8}$$

En utilisant la calculatrice

3.2 x² + 2.8 x² − 4.6 x² = ÷ (2 × 3.2 × 2.8) = Shift cos = °,,,

Comme le cosinus de l'angle est négatif, donc l'angle est obtus et non pas supérieur à 180°

$\therefore m(\angle A) = 99° 53' 49''$

Essayez de résoudre

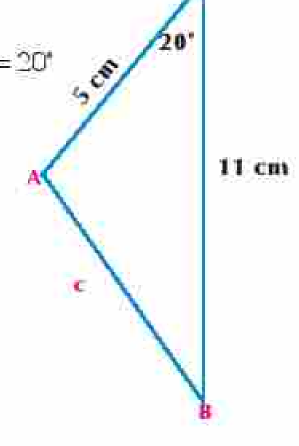
1) Trouvez la mesure du plus grand angle dans le triangle ABC tel que $a = 11$ cm, $b = 10$ cm et $c = 8$ cm

Utilisé la loi de cosinus pour résoudre un triangle :

La loi de cosinus nous permet de résoudre un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.

[I] Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux :


Exemple



(2) Résoudre le triangle ABC tel que a = 11cm , b= 5cm , m (∠ C) = 20°


Solution

Il faut calculer c , m (∠A) , m (∠B)

$\because \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C$ (loi de cosinus)

$= (11)^2 + (5)^2 - 2 * 11 * 5 \cos 20°$

$c = \sqrt{(11)^2 + (5)^2 - 2 * 11 * 5 \cos 20°} \quad \simeq 6.529$ cm

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(5)^2 + (6.529)^2 - (11)^2}{2\,(5)\,(6.529)} \quad \simeq -0.817$

m (∠ A) = 144° 49'

m (∠ B) = 180° - [m (∠ A) + m (∠ C)]

= 180° - [144.786° + 20°] = 15.214°

Remarque

Dans certains cas, nous avons deux possibilités pour calculer la mesure d'un angle, l'une par la loi de sinus et l'autre par la loi de cosinus. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser la loi de cosinus pour calculer la mesure de l'angle pour les raisons suivantes.

1- Au cas où on utilise la loi de sinus :

- le sinus d'un angle aigu ou d'un angle obtus est toujours positif.

2- Au cas où on utilise la loi de cosinus :

- le cosinus d'un angle obtus est négatif.
- le cosinus d'un angle aigu est positif.
- la loi de cosinus nous permet résoudre un triangle en connaissant les longueurs de trois côtes. Connaissez - vous que la somme des longueurs de deux côtés est plus grande que la longueur du troisième côté.

Aide

On peut utiliser la loi pour calculer m (∠ A), m (∠ B) après avoir déterminé c, mais c'est mieux pour distinguer les angles aigus et les angles obtus.

Essayez de résoudre

(2) Résoudre le triangle ABC tel que a = 24.6 cm , c= 14.2 cm, m (∠ B) = 42° 18'

[II] Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de ses trois côtés :

Exemple

(3) Résoudre le triangle ABC tel que a = 9cm , b = 7 cm , c= 5 cm.

Solution

Il faut calculer les mesures des angles A, B et C

$\because \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 5} = -0.1$

$m(\angle A) \simeq 95° 44' 21''$

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 9} \simeq 0.633$

$m(\angle B) \simeq 50° 42' 13''$

$m(\angle C) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B)] = 33° 33' 26''$

Essayez de résoudre

(3) Résoudre le triangle ABC tel que a = 12.2cm, b = 18.4cm, c = 21.1cm

La loi de cosinus offre une méthode permettant d'éviter le cas ambigu rencontré lors de l'étude de la loi de sinus. Pour trouver la longueur du troisième côté en utilisant la loi de cosinus, on obtient une équation du second degré dont le nombre de solutions est égal au nombre de triangles possibles. L'exemple suivant illustre ce cas

Exemple **Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure d'un angle :**

(4) Résoudre le triangle ABC tel que a = 6 cm , b = 7 cm , m ($\angle$ A) = 30°

Solution

Il faut calculer c , m ($\angle$ B) , m ($\angle$ C)

$\because a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (loi de cosinus)

$6^2 = 7^2 + c^2 - 2 \times 7 c \cos 30°$

$0 = c^2 - 7\sqrt{3}\, c + 13$ then $c^2 - 7\sqrt{3}\, c + 13 = 0$

$\therefore c = \frac{1}{2}(7\sqrt{3} \pm \sqrt{(-7\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 13})$ (formule générale de résolution de l'équation du second degré)

$\therefore c = 10.935$ or 1.188

Chaque valeur positive de c représente un triangle. Donc, il y a deux triangles.

Pour calculer cos B :

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

Rappel

$(\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2})$

si c = 10.935

$$\cos B_1 = \frac{(10.935)^2 + (6)^2 - (7)^2}{2\ (10.935)\ (6)}$$

$\cos B_1 = 0.812$

$m(\angle B_1) = 35.685°$

$\simeq 35°\ 41'\ 6''$

$m(\angle C_1) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B_1)]$

$\simeq 114.314°$

$\simeq 114°\ 18'\ 50''$

si c = 1.188

$$\cos B_2 = \frac{(1.188)^2 + (6)^2 - (7)^2}{2\ (1.188)\ (6)}$$

$\cos B_2 = -0.812$

$m(\angle B_2) = 144.314°$

$\simeq 144°\ 18'\ 50''$

$m(\angle C_2) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B_2)]$

$\simeq 5.685°$

$\simeq 5°\ 41'\ 6''$

Interprétation : Dans l'un des deux triangles $c = 10.94$, $m(\angle B) = 35°\ 41'\ 6''$, $m(\angle C) = 144°\ 18'\ 50''$, et dans l'autre triangle $c = 1.19$, $m(\angle B) = 114°\ 18'\ 50''$, $m(\angle C) = 5°\ 41'\ 6''$. Comparer ces résultats avec les résultats obtenus dans l'exemple (6) de la leçon (1) qui traite le même problème en utilisant la loi de sinus.

Essayez de résoudre

(4) Résoudre le triangle ABC tel que $a = 8.6$cm , $b = 11.1$cm , $m(\angle A) = 63°$

Applications géométriques sur la loi de cosinus

Exemple

(5) ABC est un triangle tel que $a = 63$ cm , $b - c = 27$ cm, et le périmètre du triangle est égal à 140 cm, Calculer b et c puis trouver la mesure du plus petit angle du triangle et l'aire de sa surface à un centimètre carré près.

Solution

$\because\ a + b + c = 140$ (périmètre du triangle) , $a = 63$

$\therefore\ b + c = 140 - 63$ d'où $b + c = 77$ (1)

$\because\ b - c = 27$ (hypothèse) (2)

De (1) et (2) par addition on obtient:

$2b = 104$ d'où $b = 52$ cm

En substituant en (1) , on a $c = 25$cm

On remarque que c est le plus petit côté du triangle ABC

$\therefore\ \angle C$ est le plus petit angle du triangle ABC

$$\therefore\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(63)^2 + (52)^2 - (25)^2}{2 \times 63 \times 52} = 0.9230769$$

$\therefore\ m(\angle C) = 22°\ 37'$

L'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2}$ ab sin C

$$= \frac{1}{2} \times 63 \times 52 \times \sin 22° 37' \quad \simeq 630 \text{ cm}^2$$

Essayez de résoudre

(5) ABC est un triangle tel que b = 4cm, a + c = 11cm , a - c = 1cm , Démontrer que m ($\angle$A) = 2 m ($\angle$B). Trouver ensuite, le périmètre du triangle ABC et l 'aire de sa surface à un centimètre carré près.

Exemple

(6) ABCD est un quadrilatère tel que AB = 22cm , m ($\angle$ADB) = 65° , m ($\angle$DBA) = 50°, BC = 25cm, DC = 18cm, Calculer : m ($\angle$CBD) , m ($\angle$ BCD)

Solution

Dans le triangle ABD

m ($\angle$ A) = 180° - (50° + 65°)

= 180° - 115° = 65°

$\because$ m ($\angle$ A) = m ($\angle$ D) = 65°

$\therefore$ AB = BD = 22cm

Dans le triangle DBC

$$\cos(\angle DBC) = \frac{(BD)^2 + (BC)^2 - (DC)^2}{2 (BD) (BC)}$$

$$= \frac{(22)^2 + (25)^2 - (18)^2}{2 \times 22 \times 25} \simeq 0.7137$$

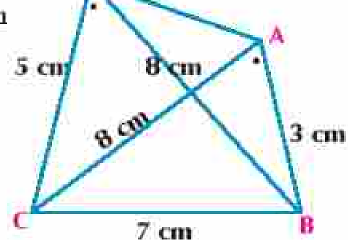
$\therefore$ m ($\angle$ DBC) $\simeq$ 44° 28' 6''

$$\cos(\angle BCD) = \frac{(BC)^2 + (CD)^2 - (BD)^2}{2 (BC) (CD)} = \frac{(25)^2 + (18)^2 - (22)^2}{2 \times 25 \times 18} \simeq 0.5167$$

$\therefore$ m ($\angle$ BCD) $\simeq$ 58° 53' 28''

Essayez de résoudre

ABCD est un quadrilatère tel que m ($\angle$ DAB) = m ($\angle$ DBC) = 90° , BD = 10cm , AD = 8cm , m ($\angle$ DCB) = 30° , Calculer AC à un centimètre près.



Exemple

(7) ABCD est un quadrilatère tel que AB = 3cm , AC = 8cm, B C = 7cm , CD = 5cm , BD = 8cm, Démontrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Solution

Dans le triangle ABC

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(8)^2 + (3)^2 - (7)^2}{2 * 8 * 3} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ m($\angle$ A) = 60° **(1)**

Dans le triangle BDC

$\cos D = \dfrac{(CD)^2 + (DB)^2 - (BC)^2}{2\,(CD)\,(DB)} = \dfrac{(5)^2 + (8)^2 - (7)^2}{2 * 5 * 8} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ m($\angle$ D) = 60° **(2)**

$\because$ m ($\angle$BAC) = m ($\angle$BDC) et les deux angles sont tracés sur une même base $\overline{BC}$ et d'un même côté de la base, alors le quadrilatère ABCD est **inscriptible**. **(Ce qu'il fallait démontrer).**

Essayez de résoudre

6) ABCD est un quadrilatère tel que AB = 9 cm, BC = 5 cm, CD = 8 cm, DA = 9 cm, AC = 11 cm. Démontrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible.



Compléter ce qui suit :

1) On utilise .... pour résoudre le triangle étant donné les longueurs de deux cotés et la mesure de l'angle compris entre eux.

2) On utilise .... pour résoudre le triangle étant donné les mesures de deux angle et la longueurs d'un cotés dans le triangle

3) Dans un triangle MNO, on a : $m^2 = n^2 + o^2 -$ .... ; $\cos M = \dfrac{n^2 + o^2 - \text{..........}}{\text{..........}}$

4) Si les longueurs des côtés d'un triangle ABC sont 13 cm , 17 cm et 15 cm, la mesure du plus grand angle dans le triangle est ....°

5) Si les longueurs des côtés d'un triangle XYZ sont 5,7 cm , 7,4 cm et 4,3 cm, la mesure du plus petit angle dans le triangle est ....°

6) Dans un triangle XYZ si x = 10 cm , y = 6 cm , m($\angle$Z) = 60°, alors z = ...

7) Dans un triangle MNO on a $n^2 + o^2 - m^2 =$ ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

8) La mesure du plus grand angle dans un triangle dont les longueurs des côtés sont 3 , 5 et 7 est

a) 150° b) 120° c) 60° d) 30°

9) Dans un triangle MNO, l'expression $m^2 + n^2 - o^2$ est égale à :

a) cos M b) cos N c) cos O d) Aucune des réponses précédentes

10 Dans un triangle XYZ, on a $y^2 + z^2 - x^2 = 2\,yz$

(a) cos X (b) sin Z (c) cos Z (d) sin X

11 Dans un triangle ABC, si a : b : c = 3 : 2 : 2 alors cos A est égal à

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $-\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$

Répondre aux questions suivantes :

12 Dans chacun des cas suivants, indiquez si le triangle a une solution unique, deux solutions ou n'a pas de solution. Trouvez les solutions possibles puis donnez un résultat approché à un décimal près.

(a) a = 4cm, c = 16cm, $m(\angle C) = 115°$ (b) a = 12 cm, c = 7cm, $m(\angle A) = 27°$

(c) a = 5cm, c = 12cm, $m(\angle A) = 65°$ (d) a = 14 cm, b = 18cm, $m(\angle A) = 42°$

13 Dans le triangle ABC si :

(a) a = 5cm, b = 7cm, c = 8cm démontrer que $m(\angle B) = 60°$

(b) a = 3cm, b = 5cm, c = 7cm démontrer que $m(\angle C) = 120°$

(c) a = 13cm, b = 7cm, c = 13cm trouver $m(\angle C)$

(d) a = 13cm, b = 8cm, c = 7cm trouver $m(\angle A)$

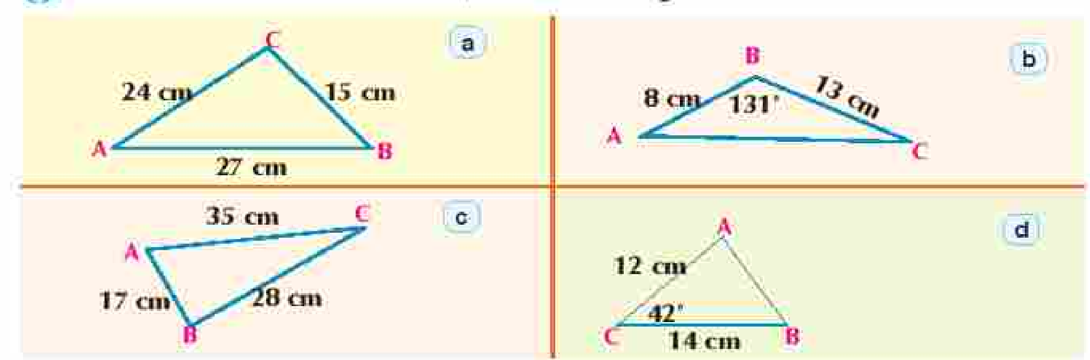
(e) a = 10cm, b = 17cm, c = 21cm trouver la mesure du plus petit angle du triangle

(f) a = 5cm, b = 6cm, c = 7cm trouver la mesure du plus grand angle du triangle

(g) a = 17cm, b = 11cm, $m(\angle C) = 42°$ trouver c à un centième près

(h) b = 16, c = 14, $m(\angle A) = 72°$ trouver a à un centième près

14 Dans chacun des exercices suivants, résoudre le triangle donné :



15 Dans chacun des exercices suivants, peut-on tracer le triangle selon les informations données? Si oui, résoudre le triangle :

(a) $m(\angle A) = 55°$, b = 12cm, c = 7cm (b) a = 3.2 cm , b = 7.63 cm , c = 6.4 cm

(c) a = 12cm, b = 21cm, $m(\angle C) = 95°$ (d) a = 1 cm , b = 5 cm, c = 4 cm

(e) $m(\angle A) = 42°$, a = 7cm, b = 10cm

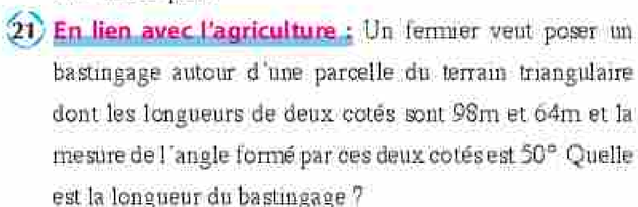
Applications géométriques

16 Les longueurs de deux côtés d'un parallélogramme sont 18 cm et 26 cm et la mesure de l'angle compris entre eux est 39°. Trouver, à un centième près, la longueur de la plus petite diagonale du parallélogramme.

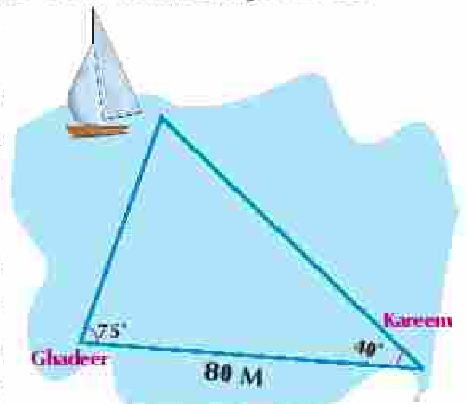
17 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 9 cm , BC = 5 cm , CD = 8 cm et AC = 11 cm. Démontrer que ABCD est un quadrilatère inscriptible.

18 ABCD est un parallélogramme tel que AB = 9cm, B C = 13cm, A C = 20 cm, Trouver la longueur de $\overline{BD}$

19 ABC est un triangle de périmètre 70cm, a = 26cm, m(∠ A) = 60° , Calculer son aire.



20 **En lien avec la navigation maritime :** Karim et Ghadir sont situés au bord d'une rivière.Quelle est la distance entre Karim et le bateau ? Donnez une valeur approchée à un mètre près.



21 **En lien avec l'agriculture :** Un fermier veut poser un bastingage autour d'une parcelle du terrain triangulaire dont les longueurs de deux cotés sont 98m et 64m et la mesure de l'angle formé par ces deux cotés est 50° Quelle est la longueur du bastingage ?

22 **Theoretical proof:** Soit ABC un triangle tel que D est le milieu de $\overline{BC}$, Démontrer que $(AB)^2 + (AC)^2 = 2\,(AD)^2 + 2\,(BD)^2$

Si AB = 5 cm , AC = 8 cm et BC = 12 cm , trouver AD

23 **Démonstration théorique (pour les excellents) :** Soit ABC un triangle tel que : $(a + b + c)\,(a + b - c) = k\,ab$ **démontrer que :** $K \in\,]0\,,\,4[$, puis trouver la m(∠ C) dans k = 1

Applications de la vie quotidienne :

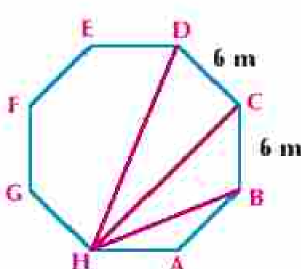
24 **Distances :** Karim prend son moto de la ville C pour aller à la ville A passant par la ville B.

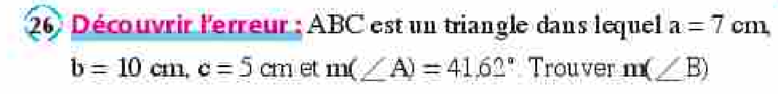
Il roule à une vitesse uniforme 36 km/h. puis il rentre de la ville c vers la ville A á une vitesse uniforme 42 km/h. **Trouvez :**

a La distance, en km, entre la ville C et la ville A.

b Le temps total, en minutes, du voyage.

25 **Planification urbaine :** Un ingénieur a dessiné le plan d'un bâtiment sous la forme d'un octogone régulier de 6 mètres de cotés, trouver les longueurs des diagonales $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HD}$.





26 **Découvrir l'erreur :** ABC est un triangle dans lequel a = 7 cm, b = 10 cm, c = 5 cm et m(∠ A) = 41,62°. Trouver m(∠ B)

Solution de Ziad

$\because \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$

$\therefore \dfrac{10}{\sin B} = \dfrac{7}{\sin 41{,}62}$

$\therefore \sin B = \dfrac{10 \sin 41{,}62}{7} \simeq 0{,}9488$

$\therefore m(\angle B) = 71{,}59°$

Solution de Karim

$\because \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$

$\therefore \cos B = \dfrac{(7)^2 + (5)^2 - (10)^2}{2 * 7 * 5} \simeq -0{,}3714$

$\therefore m(\angle B) \simeq 111{,}8°$

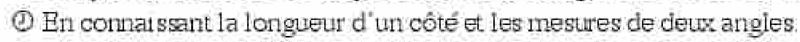
Résumé de l'unité

1 **Loi de sinus** Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés C'est-à-dire que : Dans un triangle ABC, on a :

◴ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2\,r$

(où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC)

Nous pouvons utiliser cette loi pour résoudre le triangle dans les cas suivants:

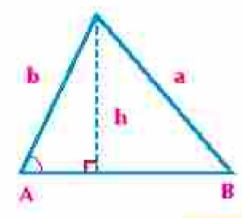


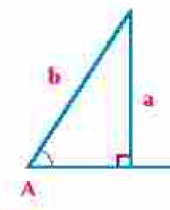
◴ En connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux angles.

◴ En connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.

2 **Déterminé le nombre des triangles et le cas ambigu :**

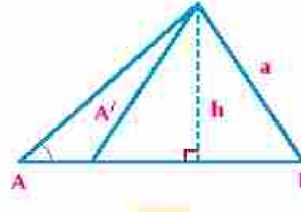
Cas ambigu : Etant donné les longueurs de deux côtés et la mesure d'un angle opposé à l'un des eux côtés de longueurs données.





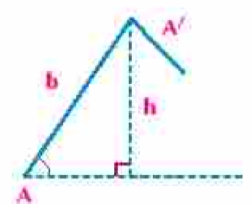
Un triangle unique

$a \leqslant b$ $\quad$ $a = h$



Deux triangles

$h < a < b$

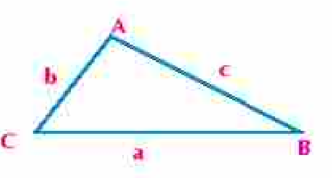


Aucune triangle

$a < h$

Aire d'un triangle = la moitié du produit des longueurs de deux cotés par la sinus de l'angle compris entre eux.

$A(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\,ab \sin C = \frac{1}{2}\,ac \sin B = \frac{1}{2}\,bc \sin A$



Loi de cosinus : Dans tout triangle, on a



$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c \cos A$ on en déduit que $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2c\,a \cos B$ on en déduit que $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,c\,a}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b \cos C$ on en déduit que $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$

Utilisé la règle de cosinus pour résoudre un triangle : On peut utiliser la règle de cosinus pour résoudre un triangle en connaissant

- les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.
- les longueurs de ses trois côtés
- les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux. La loi de cosinus offre une méthode permettant d'éviter le cas ambigu rencontré lors de l'étude de la loi de sinus. Pour trouver la longueur du troisième côté en utilisant la loi de cosinus, on obtient une équation du second degré dont le nombre de solutions est égal au nombre de triangles possibles



Complétez ce qui suit :

1. Dans un triangle, les longueurs des côtés sont proportionnels aux ....
2. On peut utiliser la loi des cosinus pour Calculez les mesures des angles d'un triangle en connaissant .... ou ....
3. Le côté qui est la plus grande longueur est opposé ....
4. On peut utiliser la loi des sinus pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle en connaissant ....
5. Résoudre un triangle veut dire trouver .... et .... si on connait au mois ....

Choisis la bonne réponse :

6. XYZ est un triangle tel que x = 15 cm, y = 25 cm et z = 35 cm, alors la mesure du plus grand angle du triangle:
   a) 150° b) 120° c) 40° d) 90°
7. ABC est un triangle tel que a = 4 cm , b = 7 cm et , m(∠C) = 120° , alors son aire
   a) 14 cm^2 b) $7\sqrt{3}$ cm^2 c) 28cm^2 d) $7\sqrt{2}$ cm^2
8. XYZ La longueur d'un côté d'un triangle équilatéral est $10\sqrt{3}$ cm , alors la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle :
   a) 5 cm b) 10 cm c) 15 cm d) 20 cm
9. La longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle XYZ dont m(∠C) = 30°, alors a :
   a) 5cm b) 10 cm c) 15 cm d) 20 cm
10. Soit XYZ un triangle tel que y = 12,6 cm, m (∠X) = 71° 48', m(∠Z) = 48°12', calculez x et z
11. Soit ABC un triangle tel que c = 16,2 cm, m(∠A) = 33°18' , m(∠B) = 43°12' , calculez a, b et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC
12. Calculez le périmètre d'un triangle ABC tel que c = 8,7cm , m(∠A) = 57°13', m(∠B) = 64°18'
13. Calculez l'aire du cercle circonscrit au triangle ABC tel que a = 6 cm et m(∠A) = 60° Arrondissez le résultat à une unité près

(14) Soit ABC un triangle tel que AC = 4,7 cm, m(∠B) = 34°, m(∠C) = 66°, calculez la longueur de $\overline{BC}$, puis le périmètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

(15) Si le périmètre d'un triangle ABC est des 40 cm, m(∠A) = 44°, m(∠B) = 66°. Trouvez les longueurs des côtés du triangle.

(16) Si l'aire d'un triangle ABC est de 450 cm^2, m(∠B) = 82°, m(∠C) = 56° calculez a?

(17) **Démonstration théorique :** Démontrez que l'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{abc}{4r}$ où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

(18) Trouvez la mesure du plus grand angle du triangle ABC tel que a = 6 cm , b = 10 cm et c = 14 cm

(19) Trouvez la mesure du plus petit angle du triangle ABC tel que a = 7 cm , b = 5 cm et c = 10 cm

(20) Trouvez les mesures des angles du triangle ABC tel que a = 7,6 cm , b = 5,8 cm et c = 3,4 cm

(21) ABC est un triangle tel que a = 12 cm , b = 13 cm et c = 10 cm. Trouvez m(∠A) à une minute près puis calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle

(22) Soit ABC un triangle tel que a = 13 cm , b = 14 cm et c = 15 cm. Trouvez m(∠B), puis calculez l'aire du triangle ABC à un centimètre carré près.

(23) Soit ABC un triangle tel que m(∠C) = 96° 23` , a = 7cm ,b = 9cm. Trouvez :

a) c

b) l'aire du triangle ABC à un centimètre carré près

c) le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC à un centimètre près

(24) Si le périmètre d'un triangle ABC est 52 cm , a = 13 cm et b = 17 cm , calculer la mesure du plus grand angle du triangle puis calculer son aire à un centimètre carré près.

(25) Résolvez △ ABC si:

a) a = 12cm , m(∠B) = 59°, m(∠C) = 73°

b) m(∠A) = 75° 35' ; a = 7 cm ; b = 5,6cm

c) m(∠A) = 73° 10' ; a = 135° ; c = 171cm

d) m(∠B) = 36° ; b = 537cm ; c = 4cm

e) m(∠A) = 153° 12' ; b = c = 6 cm

f) a = 5cm ; b = 8cm ; c = 7cm

g) m(∠A) = 60° ; b = 8cm ; c = 15cm

h) a = 14cm ; m(∠B) = 53°, c = 12cm

i) a = 11cm ; b = 9cm ; m(∠C) = 43° 12'

Démonstration théorique

(26) Dans un triangle ABC, démontrez que :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ si a = 4 cm , b = 5 cm , c = 6 cm. Démontrez que cos C = cos 2 A

Démontrez ensuite que l'aire du triangle ABC = $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm^2

Applications géométriques

27) ABCD est un parallélogramme tel que AB = 18 cm , m($\angle$CAB) = 36°, m($\angle$EBA) = 44°, Trouvez la longueur de la diagonale $\overline{AC}$

28) ABCD est un quadrilatère tel que CD = 100 cm , m($\angle$BCA) = 36°, m($\angle$BDA) = 55°, m($\angle$BCD) = 85°, m($\angle$CDA) = 87°, Trouvez, à un centimètre près, la longueur de $\overline{BD}$, $\overline{AC}$.

29) ABCD est un trapèze tel que $\overline{AD}$ // B C , $\overline{BC}$ = 15 cm , m($\angle$E) = 118°, m($\angle$B) = 64°, m($\angle$CAD) = 24° Trouvez, à un centième près.

a la longueur de $\overline{AD}$, $\overline{BC}$.

b l'aire du trapèze ABCD.

30) ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en M , AC = 16 cm , BD = 20 cm m($\angle$ AMB) = 54° Trouvez AD a un centimètre près.

31) ABCD est un quadrilatère tel que AB = AD = 9 cm , BC = 5 cm , CD = 8 cm et AC = 11 cm. Démontrez que ABCD est un quadrilatère inscriptible

32) **Démonstration théorique :** Dans un triangle ABC , démontrez que $\frac{a}{\text{SinA}} = \frac{b}{\text{SinB}} =$, then prove that the area of the triangle is given by :
puis démontrez A(ΔABC) = $\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \text{ SinA}}$, Calculez ensuite l'aire du triangle sachant que: $a = 2\sqrt{3}$ cm ,m($\angle$B) = 30°, m($\angle$C) = 135 °

33) **Démonstration théorique (pour les excellents) :** Dans un triangle ABC, démontrez que $\frac{1}{c \sin A} + \frac{1}{a \sin B} + \frac{1}{b \sin C} = \frac{p}{\Delta}$, où p est le demi périmètre du triangle ABC et Δ son aire.

34) ABCD est un pentagone régulier de longueur de côté 18,26 cm , Trouvez la longueur de sa diagonale $\overline{AC}$

Applications de la vie quotidienne :

35) Deux signaux A et B distants de 17 mètres sont placés sur le même bord d'un ruisseau. Un autre signal est placé au point C situé sur l'autre bord du ruisseau tel que m($\angle$BAC) = 72° et m($\angle$ABC) = 53° Trouvez :

a la distance entre les deux signaux A et C à un mètre près.

b la distance, à un centième de mètre près, entre les deux bords du ruisseau en supposant qu'ils soient parallèles

36) **Expositions d'arts :** Dans une exposition, une photo est accrochée à un clou fixé sur un mur à l'aide d'un fil attaché à deux anneaux situés aux deux extrémités supérieures de la photo du Si la longueur du fil de chaque côté du clou est 30 cm et la mesure les deux parties du fil est 50° , Trouvez la distance entre les deux anneaux à un centimètre près.


Épreuve cumulative


Questions à choix multiples

1. Sans utiliser une calculatrice, la valeur de cos 120°:

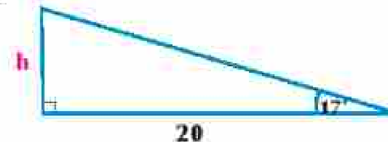
   a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. Laquelle parmi les angles suivants a la sinus et la cosinus sont négatives ?

   a) 52° b) 150° c) 200° d) 315°

3. Quelle la valeur de h dans l'enclin ci-contre à un dixième près ?

   a) 5.8 b) 6.1 c) 12.3 d) 19.1



4. Quelle est la valeur de a à un dixième près dans le triangle ABC si b = 6 cm, c = 7 cm et m(∠A) = 30° :

   a) 3.4 cm b) 3.5cm c) 3.6 cm d) 6.6 cm

5. Si le coté final d'un angle en position simple de mesure égale à θ coupe le cercle unitaire au point de coordonnées ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$) , alors tan θ est égale à

   a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{3}$

6. L'identité trigonométrique reliant entre tan E et sec E est:

   a) $\tan^2 E - 1 = \text{Sec}^2 E$ b) $\sec^2 E - 1 = \tan^2 E$
   c) $\tan^2 E - \text{Sec}^2 E = 1$ d) $\tan^2 E + 1 = \sec^2 E$

7. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC tel que m(∠A) = 60° et a = $2\sqrt{3}$ cm, est égale à

   a) 2cm b) $\sqrt{3}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

8. Dans le triangle LMN, l'expression $\frac{m^2 + n^2 - \ell^2}{2\,mn}$ est égale à:

   a) cos M b) sin N c) cos L d) sin M

Questions à réponses courtes :

9. Trouvez la valeur exacte de chacun de ce qui suit:

   a) sin 225° b) sec 150° c) tan $\frac{3\pi}{4}$ d) cos $\frac{7\pi}{6}$

10. Trouvez deux angles l'un est de mesure positive et l'autre de mesure négative dont le coté final est superposable à celui de l'angle donné dans chacun de ce qui suit:

    a) 135° b) 315° c) -45 ° d) $\frac{2\pi}{3}$

11. Transformez l'angle mesuré en degrés en radian et réciproquement dans chacun des cas suivants:

    a) 300 ° b) -135° c) $\frac{8\pi}{5}$ d) $\frac{7\pi}{4}$

12 Trouvez la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de 210° de mesure dans un cercle de 6 cm de rayon (La longueur de l'arc $\ell = Q^{rd}$)

13 Si $\sin A = \frac{5}{13}$ où $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, Tan $B = \frac{3}{4}$ so $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ trouvez la valeur de sinA cosB + cos A sin B .

Trouvez les rapports trigonométriques de deux angle A et B le quadrant dans lequel l'angle est situé puis substituez dans l'expression donnée

14 Dans le triangle XYZ si x = 10 cm, $m(\angle X) = 30°$, $m(\angle Y) = 45°$, trouvez y à un dixième près

15 ABC est un triangle dans lequel a = 4 cm , b = 5 cm et c = 6 cm. Calculez la mesure de son plus grand angle puis déterminez son aire.

Questions à réponses longues :

16 ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = \frac{2}{3} m(\angle B) = \frac{1}{2} m(\angle C)$ et le rayon du cercle circonscrit au triangle est égale à 10 cm. Calculer l'aire du triangle ABC.

17 ABC est un triangle dans lequel a = 13 cm , b = 14 cm et c = 15 cm. Calculez la longueur de son cercle circonscrit.

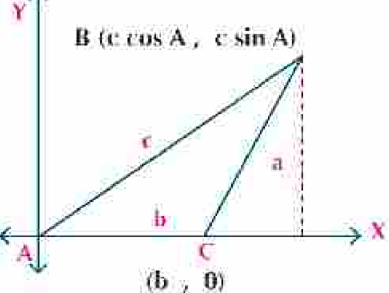
18 Résoudre le triangle LMN tel que m = 17 cm, $m(\angle L) = 33°\ 16$ et $m(\angle N) = 44°\ 19$ en arrondissant la longueur à un centimètre près et la mesure de l'angle à un degré près

19 Dans chacun des cas suivants, indiquez si le triangle a une solution unique, deux solutions ou n'a pas de solution. Trouvez les solutions possibles puis donnez les longueurs approchées à un décimal près et les mesures des angles à un degré près.

a a = 20cm, b = 28cm, $m(\angle A) = 42°$

b a = 5 cm, b = 7 cm, $m(\angle A) = 60°$

c a = 15cm, b = 10cm, $m(\angle A) = 120°$



20 Dans la figure ci-contre démontrez que :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

(Utilisez la loi de la distance entre deux points pour trouver BC^2)

Vous avez besoin d'une aide supplémentaire

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Referez à	Compétences antérieures	Compétences antérieures	leçon 1-4	leçon 3-4	Compétences antérieures	leçon 1-4	leçon 2-4	leçon 1-4	leçon 3-4	leçon 1-4
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	Compétences antérieures	Compétences antérieures	Première secondaire	leçon 1-4	leçon 2-4	leçon 1-4	leçon 1-4 , 2-4	leçon 1-4	leçon 1-4	leçon Compétences antérieures 2-4

Épreuves générales

Épreuve (1) Algèbre

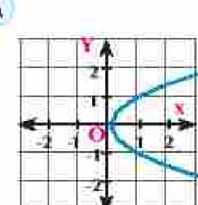
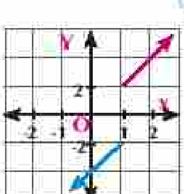
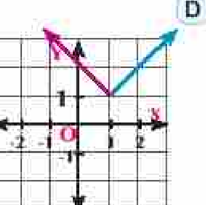
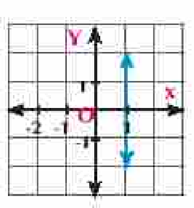
Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. Si $5^x = 2$ alors $25^x =$

   a) 10 b) 6 c) 5 d) 4

2. Parmi les figures suivantes, la figure qui représente une fonction est :

A 
B 
C 
D 

3. Si la courbe $y = \log_4 (1 - a\,x)$ passe par le point de coordonnées $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$; alors a =

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 8

4. Parmi les fonctions définies ci-dessous suivantes, la fonction injective est :

   a) $f_1(x) = x + 2$ b) $f_2(x) = x^2$ c) $f_3(x) = |x|$ d) $f_4(x) = 5$

Question (2):

1. Déterminez l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x}}$ b) $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1}$

2. Si f est une fonction telle que $f(X) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 0 \\ -2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ Tracez la courbe représentative de f.

   Du graphique; Trouvez l'ensemble image de la fonction

Question (3):

1. Soient $f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f_1(x) = 3x - 1$; $f_2: [-2; 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $f_2(x) = 3 - 2x$. Tracez la courbe représentative de la fonction $(f_1 + f_2)(x)$ en déterminant son ensemble de définition.

2. Trouvez la fonction réciproque de la fonction d'équation $y = x + 1$ puis représentez les deux fonctions dans un même quadrillage.

Question (4):

(1) **Trouvez, dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :**

(a) $\log_4 x = 1 - \log_4(x - 3)$ (b) $|x + 2| = |x - 3|$

(2) **Utilisez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe de chacune des fonctions suivantes:**

(a) $f_1(x) = x^2 - 3$ (b) $f_2(x) = x^2 + 3$

Épreuve (2) — Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

(1) Si $3^{x-2} = 2^{x-2}$ alors $x =$

(a) 3 (b) -2 (c) 0 (d) 2

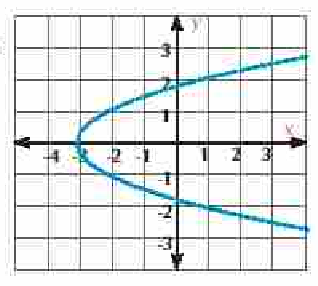
(2) Si $y = \sqrt[3]{x}$ alors la fonction réciproque de cette fonction est y =

(a) $y = \frac{1}{3}x^3$ (b) $y = x^3$ (c) $y = x^3 - 1$ (d) $y = -\frac{1}{3}$

(3) Si f est une fonction impaire définie sur l'intervalle $[-x, x]$ alors $f(-x) + f(x) =$

(a) $2x$ (b) n'est pas définie (c) $-2x$ (d) 0

(4) La courbe représentée dans la figure ci-contre est symétrique par rapport à la droite d'équation :



(a)  x = 0 (b) y = 0

(c) y = -2 (d) x = 2

Question (2):

(1) Si $f(x) = a^x$, démontrer que l'expression $\frac{1}{f(x) - 1} + \frac{1}{f(-x) - 1}$ admet une valeur constante quelque soit la valeur de x.

(2) Trouvez l'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = \log_{x-1} x$

Question (3):

1. Utilisez la courbe représentative de la fonction $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe de chacune des fonctions suivantes :

   a) $f_1(x) = |x| + 1$ b) $f_2(x) = 2 - |x|$

2. Tracez la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes, puis déterminez l'ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction:

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ b) $f(x) = |x^2 - 4x + 5|$, $x \in [0 ; 4]$

Question (4):

1. Etudiez la parité de chacune des fonctions suivantes:

   a) $f_1(x) = x \cos x$ b) $f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ |x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   c) $f_3(x) = x^2|x| - 1$

2. Trouvez dans R l'ensemble des solutions des équations suivantes :

   a) $|x| + x = 0$ b) $|2x - 3| - |6 - 4x| > 0$

Épreuve (3) Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. La courbe de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est symétrique par rapport au point de coordonnées :

   A) (2 ; 0) B) (-2 ; 0) C) (0 ; 0) D) (2 ; -2)

2. Soit la fonction exponentielle f telle que $f(x) = a^x$, ($a > 1$) alors $f(x) > 1$ pour

   A) $x \in \mathbb{R}$ B) $x \in \mathbb{R}^+$ C) $x \in \mathbb{R}^-$ D) $x \in \mathbb{Z}$

3. L'aire de la partie comprise entre les deux courbes des fonctions $f(x) = |x + 3| - 2$ et $g(x) = 0$ est

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

4) L'ensemble des solutions de l'équation $\log_x 4 = 2$ est ....

a) $\{4\}$ b) ± 2 c) 2 d) $\{-2\}$

Question (2):

1) Mettez sous la forme la plus simple l'expression : $\log_{xy} x + \log_{xy} y$

2) Si $f(x) = 2^x$ trouvez la valeur de x qui vérifie l'équation $f(x+1) - f(x-1) = 24$

Question (3):

1) Ecrivez la règle de la droite dont la pente est égale à -1 et coupe une partie égale à 3 de l'axe des ordonnées

2) Tracez la courbe représentative de la fonction tel que $f(x) = (x - 2)|x|$. Du graphique, Trouvez l'ensemble image de la fonction et étudiez le sens de variation de f

Question (4):

1) Utilisez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3$ pour tracez la courbe de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = (x+1)^3$ b) $f_2(x) = x^3 + 1$

2) Trouvez l'ensemble des solutions de l'équation $|2x - 3| = 11$

Épreuve (4) Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1) L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \log_{1-x} x$ est

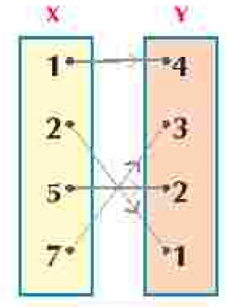
a) $x > 0$ b) $x < 1$ c) $0 < x < 1$ d) $0 \leqslant x \leqslant 1$

2) Si la fonction f est telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ alors le centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x+1)$ est

a) $(1, 0)$ b) $(0, 1)$

c) $(-1, 0)$ d) $(-1, 1)$

3) La figure ci-contre représente une fonction $f : X \longrightarrow Y$ alors $f^{-1}(4) =$



a) 1 b) 2

c) 5 d) 7

4. La courbe de la fonction $g(x) = x^2 + 4$ est l'image de le courbe de la fonction $f(x) = x^2$ par la translation d'amplitude 4 unités dans la direction de

a $\overrightarrow{OX}$ b $\overrightarrow{OX'}$ c $\overrightarrow{OY}$ d $\overrightarrow{OY'}$

Question (2):

1. Tracez la courbe représentative de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = 2^x$, $x \in [-3; 4]$
   Du graphique, Trouvez une valeur approchée de $f(-1.5)$, $(4\sqrt{2})$

2. Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log 25 + \dfrac{\log 8 \times \log 16}{\log 64}$

Question (3):

1. Si $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$; tracez la courbe de la fonction $\dfrac{f}{g}(x)$ en précisant l'ensemble de définition, l'ensemble image puis étudiez le sens de variation de la fonction.

2. Trouvez l'ensemble des solutions de l'équation : $|x + 3| + 2x = 0$

Question (4):

1. Trouvez l'ensemble des solutions des équations :

   a $|3x + 2| + 5 = 9$ b $\dfrac{1}{|2x - 3|} > 2$

2. Tracez une courbe qui vérifie les conditions suivantes :

   a passe par les points de cordonnées $(0; -2)$, $(2; 2)$, $(3; 7)$ et qui représente une fonction paire.

   b passe par les points de cordonnées $(0; 0)$, $(-2; 1)$, $(-3; 5)$ et qui représente une fonction impaire.

Épreuve (5) Algèbre

Répondez aux questions suivantes :

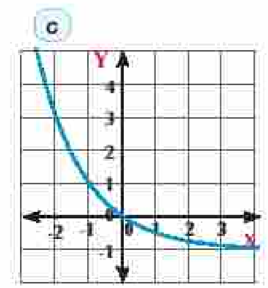
Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées .

1. La fonction $f(x) = 2^x$ est représentée par le graphique :

a

b

c



d

2. L'expression $\frac{3 \log 2}{\log 4 - \log 3}$ est équivalente à l'expression :

a) $\log_3 2$ b) $\log_7 2$ c) $\log_{12} 8$ d) $\log_7 8$

3. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ alors l'ensemble de définition de $f(x)$ =

a) $[-2 ; 2]$ b) $]-2 ; 2[$ c) $[-2 ; 2[$ d) $]-2 ; 2]$

4. Si la fonction f est une fonction paire sur [a, b] alors b :

a) a b) -a c) 2a d) a^3

Question (2):

1. Si la courbe de la fonction $f(x) = \log_a x$ passe par le point (4 ; 2), trouvez la valeur de a. Tracez ensuite la courbe de la fonction dans l'intervalle [-3; 3].

2. Trouvez l'ensemble solution de l'équation : $x^{\frac{4}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$

Question (3):

1. Trouvez l'ensemble solution de l'inéquation $|3x - 2| > 7$

2. Utilisez la courbe représentative de la fonction f(x) = x pour tracer la courbe de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = 4 + x$ b) $f_2(x) = x - 1$

Question (4):

1. Démontrez que la fonction $(x) = \frac{1 - |x|}{|x|}$ est une fonction paire puis tracez la courbe représentative de f, puis trouvez l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ et vérifiez votre réponse.

2. Déterminez a ; b et c pour que $f(x) = g(x)$ où $f(x) = (a + b)x^3 - 2$, $g(x) = x^3 + (a + c)x + b$ puis tracez la courbe représentative de f, et déterminez le sens de variation de f.

Épreuve (6) — Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes :

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées .

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+5}{x(2x^2+3)} =$

   a) $\frac{5}{8}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{3}$

2. Dans un triangle ABC si 4 sin A = 3 sin B = 6 sin C, alors m(∠C) =

   a) 89° b) 29° c) 57° d) 82°

3. Si f telle que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2a, & x = 1 \end{cases}$ est une fonction continue en x = 1, alors la valeur de a est égale à

   a) 0 b) -2 c) 2 d) 1

4. Dans le triangle XYZ, l'expression $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$ est égale à:

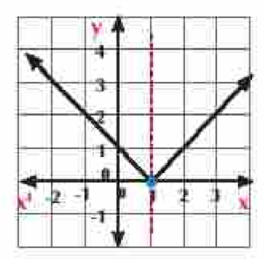
   a) cos X b) cos Y c) cos Z d) sin Z

Question (2):

1. Calculez a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5-32}{x^2+3x-10}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + 5\sin 3x}{x}$

2. Résolvez le triangle acutangle ABC tel que a = 21 cm , B = 25 cm et la longueur du diamètre du cercle circonscrit au triangle est 28 cm.

Question (3):



1. A l'aide de la représentation graphique ci-contre Trouvez :

   a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ c) f(1) =

2. Soit ABCD un parallélogramme tel que m(∠A) = 50°, m(∠DBC) = 70°, BD = 8cm, calculez le périmètre du parallélogramme.

Question (4):

1. Soit ABC un triangle tel que a = 5 cm , b = 7 cm et m(∠A) = 40° . Calculez m(∠B).

2. Trouvez la valeur de a pour que la fonction f soit continue en x = 2 où

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x > 2 \\ x-2a & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Épreuve (7) — Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes :

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées .

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} =$

   a) 3 b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

2. Dans un triangle ABC, cos (A + B) =

   a) $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2a\,b}$ b) $\frac{a^2 - c^2 - b^2}{2a\,b}$ c) $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b\,c}$ d) $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a\,b}$

3. Si ABC est un triangle tel que $\frac{\sin A}{3} = \frac{2\sin B}{5} = \frac{\sin C}{4}$ alors a : b : c =

   a) 6 : 5 : 8 b) 8 : 5 : 6 c) 7 : 2 : 4 d) 3 : 5 : 6

4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x-1} =$

   a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 3

Question (2):

1. Si la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+3} & , x \neq 3 \\ x + a & , x = 3 \end{cases}$ est continue en x = -3, trouvez la valeur de a.

2. Soit ABC un triangle tel que $\frac{1}{3}\sin A = \frac{1}{4}\sin B = \frac{1}{5}\sin C$. Trouvez m(∠C) , et si le périmètre du triangle = 24 cm calculez son aire.

Question (3):

1. Trouvez : $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin 3x}{5x\cos 2x}$

2. Résolvez le triangle ABC tel que a = 9cm, b = 15cm, m(∠C) = 106°

Question (4):

1. Trouvez $\lim_{x \to -2} \frac{(x-3)^2 - 1}{x^2 - 4}$

2. Soit ABCD un quadrilatère tel que AB = 27 cm, BC = 12 cm, CD = 8 cm, DA = 12 cm et AC = 18 cm. Démontrez que $\overline{AC}$ est une bissectrice de ∠BAD puis calculez l'aire du quadrilatère ABCD.

Épreuve (8) — Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes :

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées .

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + \sin 3x}{\tan 5x} =$

(a) 5 (b) $\frac{6}{5}$ (c) 1 (d) 0

(2) Si ABC est un triangle tel que a = 6, m($\angle$B) = 2 m($\angle$A) = 80° alors c =

(a) $\dfrac{6 \sin 40°}{\sin 60°}$ (b) $\dfrac{\sin 60°}{6 \sin 40°}$ (c) $\dfrac{\sin 40°}{6 \sin 60°}$ (d) $\dfrac{6 \sin 60°}{\sin 40°}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{-3} + 2x^{-2} + 1}{x^{-2} + x^{-1} + 3} =$

(a) 2 (b) (1) (c) 3 (d) $\frac{1}{3}$

(4) Dans un triangle XYZ , si $\dfrac{\sin X}{3} = \dfrac{\sin Y}{4} = \dfrac{\sin Z}{5}$ alors la mesure du plus grand angle du triangle est

(a) 60° (b) 75° (c) 90° (d) 120°

Question (2):

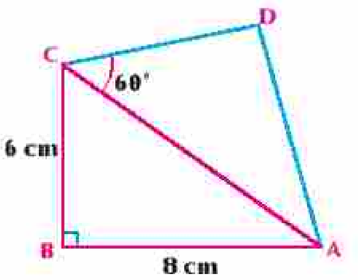
(1) Etudiez l'existence de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{si } x > 3 \\ 2x - 7 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

(2) Soit ABC un triangle tel que m($\angle$A) : m($\angle$B) : m($\angle$C) = 3 : 4 : 3 . Si a = 5 cm calculez le périmètre du triangle.

Question (3):

(1) Calculez (a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \sin^2 3x}{x^2}$

(2) Dans la figure ci-contre, ABCD est un quadrilatère tel que AB = 8cm, BC = 6cm, m($\angle$B) = 90°, DC = 5 cm, m($\angle$ACD) = 60°. Calculer l'aire du cercle circonscrit au triangle ADC



Question (4):

(1) Etudiez la continuité de la fonction f telle que

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x > -2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \leqslant -2 \end{cases}$ en $x = -2$

(2) Résolvez le triangle ABC tel que a = 5cm , b = 2c = 8cm

Épreuve (9) Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes :

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées .

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^7 - 1}{x - 1} =$ ....

a) 7 b) 8 c) 6 d) 0

2. Dans un triangle ABC , on a $\frac{a}{a-b} = \frac{\sin A}{\ldots}$

a) $\frac{\sin A}{\sin B}$ b) $\frac{\sin A}{\sin C}$ c) $\frac{\sin A}{\sin A + \sin B}$ d) $\frac{\sin A}{\sin A + \sin C}$

3. Si la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$ est continue en x = 0, alors a =

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

4. Dans un triangle XYZ si x = y , alors cos x =

a) $\frac{2y}{z}$ b) $\frac{z^2}{2y}$ c) $\frac{z}{2x}$ d) $\frac{y}{2x}$

Question (2):

1. Trouvez la valeur de a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sqrt{3 + 4x^2}$

2. Soit ABC un triangle tel que m($\angle$A) = 35° , a = 8cm , b = 6cm. Trouvez m($\angle$B).

Question (3):

1. Etudiez la continuité de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x > 1 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en x = 1

2. Si le périmètre d'un pentagone régulier est égal à 30 cm , calculez son aire.

Question (4):

1. ABCD est un parallélogramme de périmètre 20 cm. Si les longueurs de deux côtés consécutifs sont dans le rapport 2 : 3 et si BD = 8 cm, calculez la longueur de $\overline{AC}$.

2. Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ où $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x > 0 \\ a \cos 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ trouvez la valeur de a.

Épreuve (10) Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes :

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées .

(1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x^m - a^m} =$

(A) $\dfrac{m}{n}$ (B) $\dfrac{m}{n} a^{n-m}$ (C) $\dfrac{n}{m}(a)^{n-m}$ (D) $\dfrac{m}{n}(a)^{m-n}$

(2) Dans un triangle ABC , on a $\dfrac{\sin(A - B)}{\sin A - \sin B} =$ ....

(A) 1 (B) $\dfrac{c}{a - b}$ (C) $\dfrac{a}{b - c}$ (D) $\dfrac{b}{a - c}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 - x^2}{3x^2 - 1} =$

(A) $\dfrac{5}{4}$ (B) $\dfrac{5}{3}$ (C) 5 (D) $\dfrac{1}{3}$

(4) La mesure du plus grand angle dans un triangle ayant pour longueurs de côtés 6 cm , 10 cm et 14 cm est égale à

(A) 120° (B) 150° (C) 135° (D) 60°

Question (2):

(1) Etudiez l'existence d'une limite de la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan 2x}{\sin x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{5x+6}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ lorsque $x \to 0$

(2) Résolvez le triangle ABC tel que a = 5 cm, b = 7 cm, m(∠C) = 65°.

Question (3):

(1) Trouvez la valeur de m pour que la fonction f soit continue sachant que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8} & \text{si } x \neq 2 \\ \dfrac{-2}{|m|} & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(2) Dans la figure ci-contre, M est un cercle , AB = 5cm, m(∠AMB) = 80°, m(∠CAB) = 85° Trouvez: (a) le périmètre du triangle ABC
(b) l'aire du cercle M

Question (4):

(1) Trouvez $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+3)^5 - 1}{x+2}$

(2) Dans chacun des cas suivants : Indiquez si le triangle ABC admet une solution ou deux solutions ou n'a pas de solutions en approchant le résultat à un dixième près.

(a) m(∠A) = 105°, a = 8 cm, b = 5 cm (b) m(∠A) = 47°, a = 4 cm, b = 6 cm

Réponses de quelques exercices

Unité 1 Fonctions réelles et représentation graphique

Réponses de quelques exercices de la leçon (1)

(1) La relation qui représente une fonction est d

(5) L'ensemble image = $[1 ; 3] \cup \{-1\}$

(6) $\mathbb{R} - [3 ; 5[$

(7) $[-3 ; 3[$ (8) L'ensemble image = $]1 ; 10]$

(10) a $h(10) = 80$ cm/s
b $h(150) = 80$ cm/s
c $h(210) = -4 \times 210 + 880 = 40$ cm/K

(11) a $f(5000) = 12500$
b $f(10000) = 22500$

(12) $f(\ell) = \ell^2$
a $f(3) = 9$ b $f(\frac{15}{4}) = \frac{225}{16}$

Réponses de quelques exercices de la leçon (2)

(1) La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x : (1) ; (2)
La courbe est symétrique par rapport à l'axe des y : (1)
La courbe est symétrique par rapport à l'origine : (1) ; (3)

(3) fonctions paires : (a) ; (f)
fonctions impaires : (b) ; (c) ; (e)
fonctions ni paire ni impaires : (d) ; (e) ; (f)

(4) a ; d impaire c paire b ni paire ni impaire

(5) a ; c paire b impaire d ni paire ni impaire

(7) Fig (1) : Ensemble image = $[2 ; \infty[$; n'est pas injective
Fig (2) : Ensemble image = $[-2 ; 2] - \{0\}$; n'est pas injective
Fig (3) : Ensemble image = $[-3 ; 6]$; n'est pas injective
Fig (4) : Ensemble image = $\mathbb{R} - \{0\}$; injective

(8) a ; b et c fonctions injectives
d ; e ne sont pas injectives

Réponses de quelques exercices de la leçon (3)

(1) fig (1) : Ensemble image = $\mathbb{R} - [-2 ; 2]$
Croissante sur $]-\infty ; 0[$; $]0 ; \infty[$
fig (2) : Ensemble image = $[0 ; \infty[$
décroissante sur $]-2 ; 0[$; $]2 ; \infty[$
decreasing over $]0 ; \infty[$
fig (4) : Ensemble image = $\mathbb{R} -]0 ; 3]$
Croissante sur $]-\infty ; 0[$; $]0 ; \infty[$

(3) a Ensemble image = $[1 ; 6]$; décroissante sur $]-2 ; 1[$; croissante sur $]1 ; 6[$

Réponses de quelques exercices de la leçon (4)

(1) a $C = -4$

(3) C (4) B (5) A (6) C

(10) a $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ b $f(x) = \frac{1}{x} - 3$
e $f(x) = \frac{1}{x+2} - 2$
f $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

Réponses de quelques exercices de la leçon (5)

(1) $\{-1 ; 5\}$ (2) $\{-2 ; 5\}$ (3) $\{6\}$
(4) $\{0\}$ (5) $\{1\}$ (6) $\{\frac{3}{2}\}$
(10) $\{-4 ; 10\}$ (14) $\{1 ; 5\}$
(13) $]-\infty ; 0]$ (15) $\{\frac{1}{2}\}$
(16) $]-1 ; 3[$ (17) $]-1 ; 5[$

Unité 2 Puissances et logarithmes

Réponses de quelques exercices de la leçon (1)

(3) a 4 b $\frac{125}{8}$ c $\frac{125}{8}$
d $\frac{9}{3}$ e 4

(4) a 4 b $\frac{1}{2}$ c 16
d $(\sqrt[4]{X})^4$ e 2
f $\{0 ; 4\}$ g 25

(7) a $\frac{1}{4}$ c 9
d $\{0 ; \pm\sqrt[4]{5}\}$
e $\{1 ; 32\}$ f $\{9 ; 25\}$
g $\{27\}$

Réponses de quelques exercices de la leçon (2)

(3) b $x ; 5$ e $x - 1 ; \frac{8}{3}$

(4) a $\mathbb{R}$; $]0 ; \infty[$; croissante
b $\mathbb{R}$; $]0 ; \infty[$; décroissante
c $\mathbb{R}$; $]-\infty ; -3[$ croissante
d $\mathbb{R}$; $]3 ; \infty[$ croissante

(5) 217126 L.E

(6) $Y = 54000(0.1)^N$; 54

(7) 155 (9) $36400 (1.04)^N$; 53881

Réponses de quelques exercices de la leçon (3)

(1) a B b 1 c C

(2) a $\{1\}$ b $\{-1\}$ c $\{2\}$
f $\{2\}$ h $\{2 ; 3\}$ i $\{-7\}$

(3) a 6 b 0

(4) 2 (5) 1

(8) a 2046 b 16

Réponses de quelques exercices de la leçon (4)

(3) g $f^{-1}(x) = 3 - (x-2)^2$ où $x \leqslant 2$
i $f^{-1}(x) = \sqrt{x+9} - 4$ où $x \leqslant -9$

Réponses de quelques exercices de la leçon (5)

(1) a $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ b $\log_{\frac{2}{5}} \frac{16}{625} = 4$
c $\log_5 1 = 0$ d $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$

(2) a $100 = 10^2$ b $4\sqrt{2} = (2)^{\frac{5}{2}}$
c $1 = 7^0$ d $121 = (\sqrt{11})^4$

(8) A (9) B (10) B
(11) B (12) A (13) B
(14) D

(15) a 4 b 3 c 6
d 4 e -3

(16) a 27 b 3 c 3
d 9 e 3 f -3 ; 2

Réponses de quelques exercices de la leçon (6)

(2) a 1 b 1 c 2
d 1 e 0 f 0

(3) a ✗ b ✗ c ✓
d ✗ e ✓ f ✓

(7) a 0.4983 b 2
c 1.1374 d 1.2237

(8) 27 nombres (9) a 3 b 10^{-9}

(11) $\log 10 = 1$

Réponses de quelques exercices généraux

(1) a b b d c a d a
e b f b g b i a

(2) a (-1) b (4) c (2)
d $(8 ; -8)$ e $(10 ; 0.1)$
f (16) g $(\frac{1}{5})$
i $(\frac{-17}{8})$

(3) a 25 b $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^+$
c $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}$ d 1
e $(2 ; 0)$ f 64

Réponses de quelques exercices de l'épreuve cumulative

(2) a 10 b $\frac{11}{15}$ c 2

(3) a $(32 ; 3)$
b $(\frac{25}{3})$ c (1)

(4) a 7 b 89 c 0

(5) $(x - y)^2 = 0 \rightarrow x = y$

(6) a 17.15

Unité 3 Limites et continuité

Réponses de quelques exercices de la leçon (1)

(1) a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ b $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

(2) (a) $\lim\limits_{x \to 0} f(a) = 1$ (b) $f(0) = 1$

(9) $\lim\limits_{x \to 2} (5x + 4) = 14$

(10) $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 1) = -2$

(11) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

(12) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$

(13) (a) 2 (b) -3 (c) 3 (d) 0 (e) 0 (f) 0

Réponses de quelques exercices de la leçon (2)

(1) 5 (2) -1 (3) -1

(4) 4 (5) $5A^4$ (6) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(7) $\frac{-3}{4}$ (8) $\frac{4}{3}$ (9) 3

(16) 2 (17) -1 (18) π

(22) $\frac{-4}{5}$ (23) $\frac{-4}{5}$ (24) $\frac{7}{6}$

Réponses de quelques exercices de la leçon (3)

(1) 1 (2) -2 (3) -7

(4) ∞ (5) 2 (6) ∞

(7) ∞ (8) 3 (9) 3

(10) 0 (11) 3 (12) 1

(25) 2 (26) 9 (27) -5

(28) $\frac{7}{2}$ (29) -1 (30) $\frac{1}{8}$

(31) $\frac{-1}{2}$ (32) $\frac{-3}{10}$ (33) $\frac{-2}{3}$

(34) $\frac{1}{8}$ (35) -3 (36) $\frac{-2}{3}$

(37) (a) = 4 ; (b) = 4 (39) 2

Réponses de quelques exercices de la leçon (4)

(1) 1 (2) 0 (3) 0 (4) 7

(5) $\frac{3}{4}$ (6) $\frac{1}{3}$ (8) 1 (29) 1

(30) 0 (31) 0 (32) -1 (33) $\frac{2}{3}$

(34) -3 (35) 1 (36) 28 (37) 65

(39) $\frac{5}{2}$ (40) -1 (41) 17 (42) $\frac{1}{5}$

(43) $\frac{-9}{8}$ (44) 0 (45) 1

Réponses de quelques exercices de la leçon (5)

(1) (a) 1 (b) 1

(2) (a) ∞ (b) ∞

(3) (a) -2 (b) -3 (c) $\frac{-3}{2}$

(d) n'existe pas (E) n'existe pas

(4) (a) 2 (b) 2

(5) (a) 3 (b) 0

(6) (a) 0 (b) -∞

(7) 4 (8) 10 (9) n'existe pas

(10) -1 (11) 2 (12) n'existe pas

Réponses de quelques exercices de la leçon (6)

(1) continue en X = 1

(2) continue en X = 2

(3) continue en X = 3

(4) n'est pas continue en x = -2 continue en x = 1

(5) continue en X = 2

(6) continue en X = 0

(7) continue en ℝ

(8) continue en ℝ

(9) continue en ℝ - {0 ; 2}

(10) continue en ℝ - {5 ; 3}

(11) continue en ℝ - {2 ; -2}

(12) continue en ℝ - {-2}

(18) continue en ℝ - $\{3 ; -3 ; \frac{\pi}{2} + n\pi\}$ où Y ∈ N

(19) continue en $] -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} [$

(26) $f(X) = \begin{cases} \frac{3x + 1 - \cos x}{5x}, & X > 0 \\ \frac{3}{5}, & x = \text{zero} \\ \frac{3}{5}\cos x, & x < \text{zero} \end{cases}$

(27) $f(X) = \begin{cases} \frac{(X - 30)^{30} + (X - 3)}{X - 3}, & X > 3 \\ 1, & X = 3 \\ \cos(3 - X), & X < 3 \end{cases}$

Réponses de quelques exercices généraux

(4) $\frac{9}{3}$ 6 (5) $\frac{5}{7}$ (6) 1 (7) $\frac{1}{3}$

(8) does not exists (9) $\frac{1}{5}$ (10) $\frac{9}{2}$

(11) $\frac{5}{3}$ (12) 16 (13) $\frac{1}{2}$ (14) $\frac{1}{5}$

(15) -3 (16) $\frac{2}{3}$ (17) $\frac{25}{2}$

(18) (a) 2 (b) 2 (c) 2

(19) 3 (20) 0 (21) ∞

(22) $\frac{5}{7}$ (23) $\frac{-5}{6}$ (24) $\frac{5}{2}$

(25) 2 (26) 0 (27) $\frac{3}{3}$

(37) $\frac{1}{8}$ (38) impossible (39) -2

(40) continue sur l'intervall [0 ; ∞ [

(41) A = $\frac{-1}{2}$ B = $-\frac{9}{2}$

Réponses de quelques exercices de l'épreuve cumulative

(1) 3 ; -2 (2) -3x

(3) $x^2 - X + 4$ (6) 1

(7) $\frac{-3}{2}$ (8) $\frac{2}{5}$ (9) $\frac{1}{3}$

(10) $\frac{1}{2}$ (11) $\frac{8}{3}$ (12) $\frac{9}{5}$

(13) $\frac{1}{3}$ (14) $\frac{3}{5}$

(28) (a) n'est pas continue (b) n'est pas continue

(c) continue (d) continue

(e) continue (f) continue

(29) (a) k = -5 (b) $k = \frac{4}{3}$

(c) k = 162

(30) k = 4 ; M = $\frac{5}{3}$

Unité 4 Trigonométrie

Réponses de quelques exercices de la leçon (4)

(2) A' b c = 6 : 4 : 3

(3) 20 cm (4) 11.3 cm (5) 4

(6) A (7) A (8) A

(9) D (10) C (11) D

(13) (a) B = 20.05° ; C = 127.95° ;
C = 25.3cm

(19) AC ≃ 14.61cm ; BC ≃ 16.59cm

(20) BD ≃ 11.18m ; AC ≃ 14.38 M

(25) b ≃ 18 cm ; r ≃ 16.56cm

(26) a ≃ 193.11 km ; b ≃ 69.44 km

Réponses de quelques exercices de la leçon (4 - 2)

(4) 74.38° (5) 35.41° (6) $2\sqrt{19}$ cm

(8) B (9) A

(10) A (11) B

(13) (c) 74.38° (d) -120°

(E) 28.07° (f) 78.46°

(g) 11.49cm (h) 17.71cm

(18) BD = 10 cm (19) $105\sqrt{3}$ cm²

(20) 85 m (21) 239 m (22) 2.9 cm

Réponses de quelques exercices généraux

(11) a ≈ 9.15cm ; b ≈ 11.4cm ;
r ≈ 8.33cm

(12) 26.48cm (13) 38 cm²

(14) BC ≈ 8.28cm ;
circumference of circle ≈ 26.4cm

(15) 10.91cm ; 14.34cm ; 14.75cm

(20) 108° 34' ; 46° 20' ; 25° 6'

(21) m (∠A) ≈ 61° 16' ; r ≈ 6.84cm

(22) m (∠B) ≈ 39° 29' ;
S.A of triangle ≈ 84cm2

(23) (a) c ≈ 12cm
(b) S.A of triangle ≈ 31cm2
(c) r ≈ 6cm

Réponses de quelques exercices de l'épreuve cumulative

(1) B (2) D (3) B

(6) D (7) A (5) D

(11) (a) $\frac{3}{5}$ 288 (c) $\pi \frac{3}{4}$ (b) π° (d) 315°

(12) 7π

Epreuves générales

Réponse des épreuves d'algèbre

Épreuve 1

Question (1):





(1) D (2) C (3) A (4) A

Question (3):

Ensemble de définition = [-2 ; 3]

Question (4):

(1) (a) Ensemble des solutions = {4}

(2) Ensemble des solutions = { $\frac{1}{2}$ }

Epreuve 2

Question (1):




(1) D (4) B

Question (2):

(1) démonstration (2) Ensemble de définition =] 1 ;∞ [- {2}

Question (3):

(2) (a) Ensemble image = [0 ;∞ [

(b) Ensemble image = [1 ; 5]

Epreuve 3

Question (2):

(1) 1 (2) 4

Question (3):

(1) f(x) = -x + 3

Question (4):

(2) {7 ; -4}

Epreuve 4

Question (1):

(1) C (2) C (3) A (4) C

Question (2):

(1) 0.4 ; 50.5 (2) 2

Question (3):

(2) {3}

Question (4):

(1) (a) { $\frac{2}{3}$; -2} (b)] $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$ [

Epreuve 5

Question (1):

(1) D (2) C (3) A (4) B

Question (2):

(1) A = 2 (2) { + 27 ; -27 ; 1 ; -1}

Question (3):

(1) $\mathbb{R}$ - {- $\frac{5}{3}$; 3}

Question (4):

(2) A = 3 ; B = -2 ; C = -3

Réponse des épreuves de calcul différentiel

Epreuve 6

Question (1):

(1) C (2) B (3) D (4) B

Question (2):

(1) (a) $\frac{80}{7}$ (b) 17

(2) A = 48° 35' ; B = 14' ; 63° ; C = 68° 11' ;
a = 26 cm

Question (3):

(1) (a) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ (b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

(c) f(1) = 0

Question (4):

(2) A = $-\frac{1}{2}$

Epreuve 7

Question (1):

(1) B (2) D (3) A (4) C

Question (2):

(1) A = -1

(2) m(∠C) = 90° ; l'aire = 12cm²

Question (3):

(1) $\frac{3}{5}$

(2) c = 18cm ; B = 53° 14' ;
(A) = 20° 46'

Question (4):

(1) $\frac{5}{-4}$ (2) 124.3 cm²

Epreuve 8

Question (1):

(1) C (2) B (3) D (4) C

Question (2):

(1) -1 (2) périmètre ≃ 10.9cm

Question (3):

(1) (a) $\frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$ (b) 3

(2) 25 π cm²

Question (4):

(1) n'est pas continue

(2) B = 125° 6' ; A = 30° 45' ;
C = 24° 48'

Epreuve 9

Question (1):

(1) A (2) C (3) C (4) B

Question (2):

(1) (a) $\frac{3}{2}$ (b) 2

(2) 43° 30'

Question (3):

(1) continue (2) 43 cm²

Question (4):

(1) 14.8 cm (2) 2

Epreuve 10

Question (1):

(2) B (3) C (4) A

Question (2):

(2) c = 6.7 cm ; A = 42 30' ; B = 72 10'

Question (3):

(1) M = ± 24

(2) 19.12cm ; 15.12 π unités carrées

Question (4):

(1) 5

(2) (a) une seule solution m(∠B) = 8/37
;
C = 37° 52' ;
c ≃ 5.1 cm

المواصفات الفنية:

مقاس الكتاب:	$\frac{1}{8}$ (٥٧ ×٨٢) سم
طبع المتن:	ألوان
طبع الغلاف:	ألوان
ورق المتن:	٧٠جم أبيض
ورق الغلاف:	١٨٠ جم كوشيه لامع
عدد الصفحات:	٢٠٤صفحة + ٤ للغلاف

رقم الإيداع: ١٦٨١٧/ ٢٠١٩

طبع بالهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية
طبعة ٢٠١٩/ ٢٠٢٠

رئيس مجلس الإدارة
مهندس/ عماد فوزى فرج محمد

الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية
٥٠٠٥١ س ٢٠١٨ - ٨٫٠٢٧


Amiria
المطابع الأميرية